К И Ї В С Ь К И Й   Н А Ц І О Н А Л Ь Н И Й
У Н І В Е Р С И Т Е Т
І М Е Н І   Т А Р А С А   Ш Е В Ч Е Н К А

Є.С.Вакал

НАБЛИЖЕНІ ОБЧИСЛЕННЯ ЗАСОБАМИ ЕЛЕКТРОННИХ ТАБЛИЦЬ

МЕТОДИЧНИЙ ПОСІБНИК
для студентів механіко-математичного факультету

Київ 2008

Рецензенти: М.П.Моклячук, д-р фіз.-мат. наук
Л.Д.Гординський, канд. фіз.-мат. наук

Вакал Є.С. Наближені обчислення засобами електронних таблиць: Методичний посібник для студентів механіко-математичного факультету. К. – 2008. – 53 с.

Пропонований посібник містить методичні вказівки до виконання завдань з курсу “Методи обчислень” засобами електронних таблиць Excel. В ньому розглянуті приклади наближеного розв’язання задач матричної алгебри, що виникають при моделюванні технічних пристроїв та різноманітних фізичних процесів.

Для студентів вищих навчальних закладів, а також для всіх, хто самостійно опановує обчислювальні та інформаційні системи.

ВСТУП

За діючим навчальним планом підготовки бакалаврів і спеціалістів студенти механіко-математичного факультету вивчають курс “Методи обчислень” протягом двох навчальних семестрів. Пропоновані методичні вказівки розроблено для виконання робіт з даної дисципліни та розраховано на студентів і викладачів.

Основна мета посібника – на базі запропонованих завдань сформувати у студентів практичні навички з розв’язання задач матричної алгебри, застосовуючи засоби електронних таблиць Excel.

Виконання практичних робіт передбачає, що студенти засвоїли попередні курси з інформатики та інформаційних технологій, алгебри, математичного аналізу. В разі виникнення труднощів при розв’язанні конкретних задач можна звернутися до довідкової інформації, яка наводиться в теоретичній частині роботи.

При підборі завдань використано літературу, що подається в кінці посібника, матеріали нормативних курсів інформатики та методів обчислень, а також спеціальних курсів, які викладаються на механіко-математичному факультеті Київського національного університету імені Тараса Шевченка.

Викладачі можуть використовувати видання як методичний посібник, доповнюючи його власними прикладами, виходячи з практичних потреб слухачів.

Розділ 1
Матричні операції в Excel

1.1. Додавання матриць

Додавати матриці можна лише у випадку, якщо вони мають однакову розмірність, тобто кількість рядків і стовпців у кожній матриці співпадає.

Сумою двох матриць $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ називається матриця $C=(c_{ij})$ такої ж розмірності, елементи якої c_{ij} дорівнюють сумам відповідних елементів a_{ij} і b_{ij} матриць *A* і *B*, тобто $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij}$.

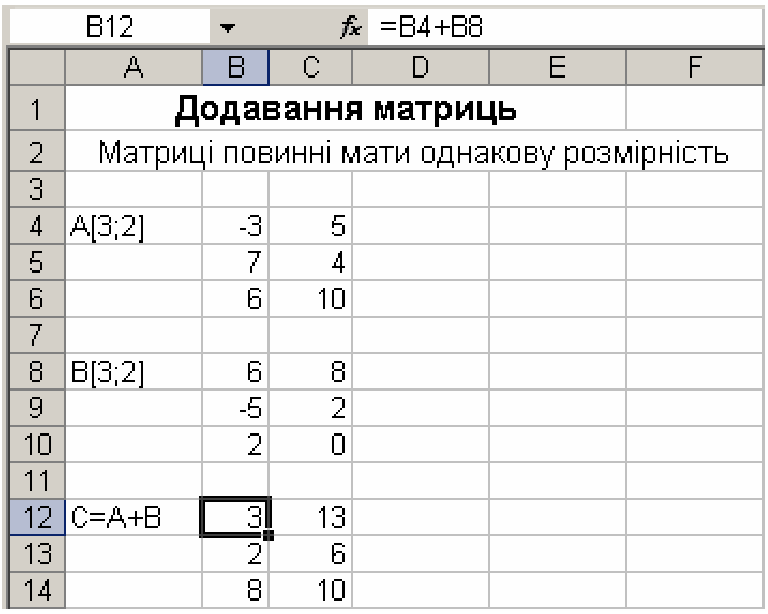
Аналогічно різницею матриць $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ називається матриця $C=(c_{ij})$ такої ж розмірності, елементи якої c_{ij} дорівнюють різницям відповідних елементів a_{ij} і b_{ij} матриць *A* і *B*, тобто $c_{ij}=a_{ij}-b_{ij}$.

Введемо в електронну таблицю в діапазони комірок B4:C6 і B8:C10 відповідно матриці *A* і *B* розмірності 3×2. Запишемо в комірку B12 формулу для додавання вмісту комірок B4 і B8. Формула матиме вигляд =B4+B8. Результатом додавання буде елемент c_{11} верхнього лівого кута матриці *C*, обчислений як $a_{11}+b_{11}$. Використовуючи далі механізм автозаповнення, скопіюємо цю формулу в діапазон комірок B12:C14. Формули в комірках цього діапазону матимуть вигляд

=B4+B8	=C4+C8
=B5+B9	=C5+C9
=B6+B10	=C6+C10

.

Excel виконає поелементне додавання матриць (рис.1.1).


B12 fx =B4+B8

	A	B	C	D	E	F
1	Додавання матриць					
2	Матриці повинні мати однакову розмірність					
3						
4	A[3;2]	-3	5			
5		7	4			
6		6	10			
7						
8	B[3;2]	6	8			
9		-5	2			
10		2	0			
11						
12	C=A+B	3	13			
13		2	6			
14		8	10			

Рис. 1.1. Додавання матриць в Excel

Робота №1. Виконати операцію додавання матриць $A + B$, де

№	A	B	№	A	B
1.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 7 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & -2 & 4 \end{pmatrix}$	2.	$\begin{pmatrix} 2 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 5 & 7 & 4 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 7 \\ -10 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 7 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	4.	$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -2 & 6 \\ 2 & 4 & 3 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ -7 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	6.	$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 9 & 4 & 1 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 6 & -1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & 8 & 7 \\ 2 & 7 & 3 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$	8.	$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 7 & -2 \\ 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$
9.	$\begin{pmatrix} 5 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & 1 & 5 \\ -2 & 2 & -1 \\ 7 & 1 & 7 \end{pmatrix}$	10.	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & 6 & -2 \\ 4 & 10 & 1 \\ 2 & 4 & -5 \end{pmatrix}$
11.	$\begin{pmatrix} 5 & 3 & -1 \\ 2 & 0 & 4 \\ 3 & 5 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ -3 & -2 & 0 \\ 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$	12.	$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 13 \\ -1 & 0 & 5 \\ 5 & 2 & 11 \end{pmatrix}$
13.	$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 3 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 5 & -7 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$	14.	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & -3 & 4 \\ 2 & -1 & 0 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$
15.	$\begin{pmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 0 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$	16.	$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & 5 \\ -4 & 3 & 8 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & 7 \\ 6 & 0 & 5 \end{pmatrix}$

1.2. Множення матриці на число

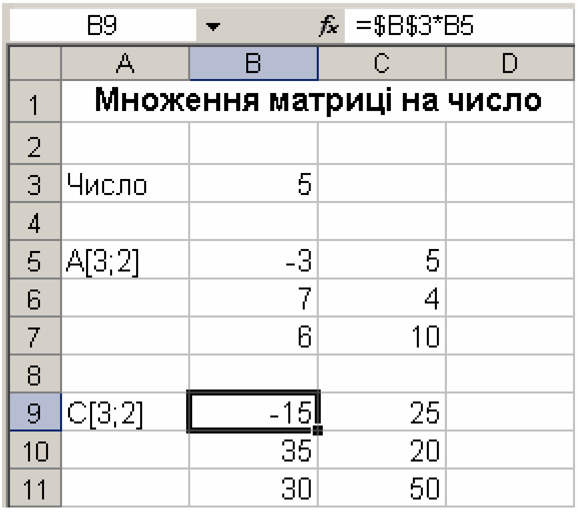
Добутком матриці A=(a_{ij}) на число (скаляр) α називається матриця, елементи якої одержані множенням всіх елементів матриці A на число α.

Введемо в електронну таблицю число (в комірку B3) і матрицю, яку на нього треба помножити (в діапазон комірок B5:C7). Запишемо в комірку B9 формулу для множення вмісту комірки B3 (число) на вміст комірки B5 (верхній лівий елемент матриці a_{11}). Формула матиме вигляд =$B$3*B5.

Адреса комірки, в якій міститься число, вибрана абсолютною (про що свідчать знаки долара, вставлені в адресу натисненням клавіші [F4]). При копіюванні цієї формули в діапазон B9:C11 в процесі використання механізму автозаповнення адреса комірки $B$3 залишиться незмінною, і всі формули в комірках діапазону будуть посилатися на число в цій комірці:

=$B$3*B5	=$B$3*C5
=$B$3*B6	=$B$3*C6
=$B$3*B7	=$B$3*C7

Excel виконає множення матриці на число (рис.1.2).



B9 fx =$B$3*B5

	A	B	C	D
1	Множення матриці на число			
2				
3	Число	5		
4				
5	A[3;2]	-3	5	
6		7	4	
7		6	10	
8				
9	C[3;2]	-15	25	
10		35	20	
11		30	50	

Рис. 1.2. Множення матриці на число в Excel

Робота №2. Виконати операцію множення матриці A на число, де матриця A у кожному варіанті береться з відповідного варіанту роботи №1, а число α задається так:

№	α	№	α	№	α	№	α
1.	4	5.	-2	9.	5	13.	10
2.	3	6.	7	10.	6	14.	12
3.	2	7.	2,5	11.	-5	15.	9
4.	1	8.	-8	12.	-6	16.	1,5

1.3. Множення матриць

Нехай $A=(a_{ij})$ і $B=(b_{ij})$ – матриці розмірності $m\times p$ і $q\times n$ відповідно. Якщо кількість стовпців матриці A дорівнює кількості рядків матриці B, тобто $p=q$, то для цих матриць визначена матриця C розмірності $m\times n$, що називається їх добутком, елементи якої обчислюються за формулою

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\ \left(i=\overline{1,m};\ j=\overline{1,n}\right)$$

Отже, щоб отримати елемент, що стоїть у *i*–му рядку і *j*–му стовпцю добутку двох матриць, треба елементи *i*–го рядка першої матриці помножити на відповідні елементі *j*–го стовпця другої матриці і отримані добутки скласти.

Введемо в електронну таблицю в діапазони комірок B4:C6 і B8:E9 відповідно матриці *A* і *B* розмірності 3×2 і 2×4. Запишемо в комірку B11 формулу для визначення елементу c_{11} верхнього лівого кута матриці *C*, обчисленого як $c_{11} = a_{11} b_{11} + a_{12} b_{21}$. Формула матиме вигляд =$B4*B$8+$C4*B$9. Використаємо далі механізм автозаповнення для копіювання формули в діапазон комірок B11:B13. Далі виділимо цей діапазон і скопіюємо формули в діапазон комірок B11:E13. Формули приймуть вигляд

=$B4*B$8+$C4*B$9	=$B4*C$8+$C4*C$9	=$B4*D$8+$C4*D$9	=$B4*E$8+$C4*E$9
=$B5*B$8+$C5*B$9	=$B5*C$8+$C5*C$9	=$B5*D$8+$C5*D$9	=$B5*E$8+$C5*E$9
=$B6*B$8+$C6*B$9	=$B6*C$8+$C6*C$9	=$B6*D$8+$C6*D$9	=$B6*E$8+$C6*E$9

В результаті множення матриці *A* на матрицю *B* отримаємо матрицю *C* розмірністю 3×4 (рис.1.3).

B11 fx =$B4*B$8+$C4*B$9

	A	B	C	D	E	F
1	**Множення матриць**					
2	Кіл-ть стовпців матриці А дорівнює к-ті рядків матриці В					
3						
4	A[3;2]	-3	5			
5		7	4			
6		6	10			
7						
8	B[2;4]	3	2	4	6	
9		1	5	1	7	
10						
11	C[3;4]	-4	19	-7	17	
12		25	34	32	70	
13		28	62	34	106	

Рис. 1.3. Множення матриць в Excel

В Excel множення матриць можна виконати за допомогою спеціальної функції для роботи з масивами. Як і в попередньому прикладі, введемо в електронну таблицю матриці *A* і *B*. Далі виділимо діапазон B11:E13, де буде розташована матриця результату *C*. Вводимо функцію масиву =МУМНОЖ(массив1;массив2), що здійснює множення матриць. Далі вказуємо діапазони комірок, в яких міститься перша матриця *A* (B4:C6) і друга матриця *B* (B8:E9). Аргументи функції (вказані діапазони) відокремлюються крапкою з комою. Щоб завершити введення формули множення матриць, треба натиснути комбінацію клавіш [Ctrl+Shift+Enter]. Дана комбінація використовується для введення функції =МУМНОЖ(B4:C6;B8:E9) у всі комірки діапазону B11:E13. Натиснення однієї клавіші [Enter] приведе до введення формули лише в комірку B11, і в електронній таблиці буде відображено лише один елемент матриці-добутку C. Після натиснення клавіатурної комбінації [Ctrl+Shift+Enter] у комірках діапазону B11:E13 відобразиться результат, як на рис. 1.3.

Робота №3. Виконати операцію множення матриць $A \cdot B$, де матриці у кожному варіанті беруться з відповідного варіанту роботи №1.

1.4. Транспонування матриць

Назвемо транспонуванням матриці таке її перетворення, при якому її рядки і стовпці міняються місцями, тобто для матриці $A=(a_{ij})$ транспонованою є матриця $B=(b_{ij})$, елементи якої обчислюються за формулою $b_{ij}=a_{ji}$.

В Excel транспонування матриці можна здійснити двома способами: переставляючи окремо кожне значення матриці або за допомогою функції масиву ТРАНСП(). Перший спосіб простіший, проте його використання не дозволяє виконати автоматичний перерахунок результатів при зміні елементів матриці.

Застосуємо перший спосіб транспонування матриці. Введемо в електронну таблицю в діапазон комірок B4:C6 матрицю A розмірності 3×2. Виділимо вказаний діапазон і скопіюємо його комірки в буфер обміну командою **Правка → Копировать**. Встановимо табличний курсор у комірку B8, де буде розташовано верхнє ліве значення транспонованої матриці. Виконаємо команду **Правка → Специальная вставка...** У вікні, що відобразиться (рис. 1.4) встановлюємо прапорець **транспонировать** і перемикач **Вставить** в положення **значения**. Для закриття вікна і створення транспонованої матриці натискаємо кнопку **ОК**. Excel розмістить транспоновану матрицю в комірках діапазону B8:D9. (рис.1.5).

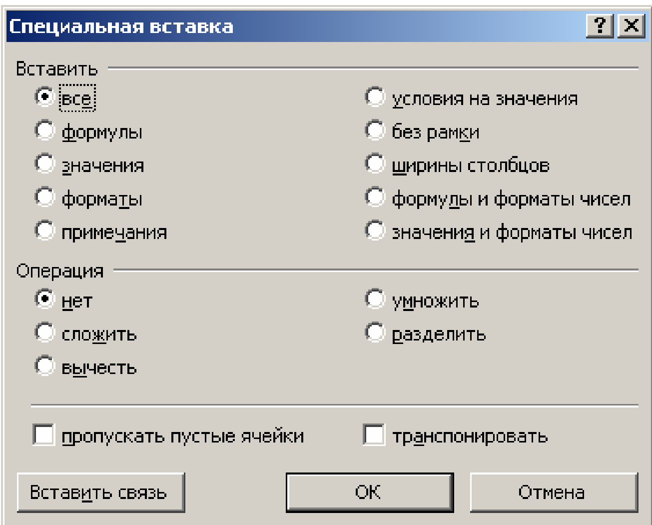


Рис.1.4. Вікно команди ***Специальная вставка...***

B8 fx -3

	A	B	C	D
1	**Транспонування матриці**			
2	Перестановка рядків і стовпців			
3				
4	A[3;2]	-3	5	
5		7	4	
6		6	10	
7				
8	A^T[2;3]	-3	7	6
9		5	4	10

Рис. 1.5. Транспонування матриці в Excel

Скористаємося другим способом транспонування матриці. Введемо в електронну таблицю в діапазон комірок B4:C6 матрицю A розмірності 3×2. Виділимо діапазон комірок B8:D9, де буде розміщено результат. Вводимо функцію масиву =ТРАНСП(массив), що здійснює транспонування матриці. Далі вказуємо діапазон комірок, в якому міститься матриця A (B4:C6). Щоб завершити введення формули транспонування матриці, треба натиснути комбінацію клавіш [Ctrl+Shift+Enter]. Дана комбінація використовується для введення функції =ТРАНСП(B4:C6) у всі комірки діапазону B8:D9. Після натиснення вказаної клавіатурної комбінації у комірках діапазону B8:D9 відобразиться результат, як на рис. 1.5.

Робота №4. Виконати операцію транспонування матриці A, де матриця A у кожному варіанті береться з відповідного варіанту роботи №1.

1.5. Обернення матриць

Знаходження оберненої матриці для даної називається оберненням цієї матриці. Операція обернення матриць може бути застосована лише до квадратних неособливих (несингулярних) матриць. Оберненою матрицею по відношенню до даної називається матриця, множення на яку даної матриці як справа так і зліва дає одиничну матрицю.

Для матриці A позначимо обернену їй матрицю через A^{-1}. Тоді за визначенням маємо

$$A\,A^{-1} = A^{-1}A = E,$$

де E – одинична матриця.

В Excel обернення матриці можна здійснити за допомогою функції масиву МОБР(). Введемо в електронну таблицю в діапазон комірок B4:D6 матрицю A розмірності 3×3. Виділимо діапазон комірок B8:D10, де буде розміщено результат. Вводимо функцію масиву =МОБР(массив), що здійснює транспонування матриці. Далі вказуємо діапазон комірок, в якому міститься матриця A, яку обертають (B4:D6). Щоб завершити введення формули обернення матриці, треба натиснути комбінацію клавіш [Ctrl+Shift+Enter]. Дана комбінація використовується для введення функції = МОБР (B4:D6) у всі комірки діапазону B8:D10. Після натиснення вказаної клавіатурної комбінації у комірках діапазону B8:D10 відобразиться обернена матриця A^{-1}, як у таблиці на рис. 1.6.

B8 | f_x {=МОБР(B4:D6)}

	A	B	C	D	E	F
1	**Обернення матриць**					
2	Матриця повинна бути квадратною і неособливою					
3						
4	A[3;3]	2	5	1		
5		1	2	4		
6		8	5	6		
7						
8	A^{-1} [3;3]	-0,0777	-0,2427	0,17476		
9		0,25243	0,03883	-0,06796		
10		-0,1068	0,29126	-0,00971		

Рис. 1.6. Обернення матриці в Excel

Робота №5. Виконати операцію обернення матриці A за допомогою функції масиву МОБР().

№	A	№	A
1.	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 3 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$	2.	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \\ 1 & 10 & 3 & 6 \\ 6 & 10 & 1 & 4 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 & -3 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$	4.	$\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 3 & 7 \\ 2 & -1 & 3 & -3 \\ -5 & 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 & -1{,}5 \end{pmatrix}$	6.	$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -1 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} 5 & -4 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & -6 \\ 1 & 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	8.	$\begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & -1 \end{pmatrix}$
9.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & -10 & -6 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$	10.	$\begin{pmatrix} 1 & 4 & -3 & 0 \\ 0 & 4 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 4 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 5 \end{pmatrix}$

№	A	№	A
11.	$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	12.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 \\ -1 & -3 & 3 & -1 \\ 1 & 3 & -8 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$
13.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$	14.	$\begin{pmatrix} 0 & 3 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ -1 & 3 & 3 & 3 \end{pmatrix}$
15.	$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 3 & 3 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$	16.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

1.6. Обчислення визначників матриць

Визначником квадратної матриці n-порядку називається число, що дорівнює алгебраїчній сумі $n!$ членів, якими є усі можливі добутки n елементів матриці, узятих по одному в кожному рядку і кожному стовпцю. Якщо матриця особлива, вона не підлягає оберненню, і її визначник дорівнює нулю.

Для обчислення визначника матриці в Excel використовується функція масиву МОПРЕД(). Оскільки для матриці A в попередньому прикладі знайдена обернена, її визначник відмінний від нуля.

Введемо в електронну таблицю в діапазон комірок B4:D6 матрицю A розмірності 3×3. Встановимо табличний курсор в комірку таблиці B7, де буде розміщено результат. Вводимо функцію масиву =МОПРЕД(массив), що здійснює обчислення визначника матриці. Далі вказуємо діапазон комірок, в якому міститься матриця A, для якої знаходиться визначник (B4:D6). Щоб завершити введення формули обчислення визначника, треба натиснути комбінацію клавіш [Ctrl+Shift+Enter]. Результат обчислень представлено на рис. 1.7.

Зауважимо, що якщо деяка комірка діапазону порожня або містить текст, то функції МОБР(), МОПРЕД() повертають значення помилки #ЗНАЧ!. Значення помилки повертається також у випадку, коли вказаний діапазон комірок містить матрицю з різною кількістю рядків і стовпців. Вказані функції виконують обчислення з точністю приблизно 16 значущих цифр, що може в деяких випадках привести до невеликих похибок заокруглення. Зокрема, визначник сингулярної матриці відрізняється від нуля на 10^{-16}.

B7 =МОПРЕД(B4:D6)

	A	B	C	D	E	F
1	**Обчислення визначника матриці**					
2	Матриця повинна бути квадратною і неособливою					
3						
4	A[3;3]	2	5	1		
5		1	2	4		
6		8	5	6		
7	Визначник:	103				
8						
9	A[3;3]	1	2	5		
10		3	7	2		
11		4	9	7		
12	Визначник:	0	–	матриця вироджена		

Рис. 1.7. Обчислення визначника матриці в Excel

У другому прикладі обчислюється визначник для матриці, розташованої в діапазоні комірок B9:D11. Оскільки рядки цієї матриці лінійно залежні (третій рядок є лінійною комбінацією перших двох), її визначник дорівнює нулю.

Робота №6. Обчислити визначник матриці A за допомогою функції масиву МОПРЕД(). Матриця A у кожному варіанті береться з відповідного варіанту роботи №5.

Розділ 2

Розв'язання систем лінійних рівнянь

Способи розв'язання систем лінійних рівнянь в основному поділяються на дві групи: *точні* та *ітераційні* методи.

Точні методи являють собою скінченні алгоритми для обчислення розв'язку системи (такими є, наприклад, правило Крамера, метод Гаусса, метод головних елементів та ін.). Ітераційні методи дозволяють отримати розв'язок системи із заданою точністю як результат збіжного нескінченного процесу (до їх числа відносяться метод ітерації, метод Зейделя та ін.).

2.1. Розв'язання систем лінійних рівнянь за допомогою оберненої матриці

Запишемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) у вигляді матричного рівняння

$$Ax=b,$$

де A – матриця коефіцієнтів системи, b – вектор-стовпець її вільних членів, x – вектор-стовпець невідомих.

Якщо матриця A – неособлива, тобто її визначник $det\ A\neq 0$, то існує обернена матриця A^{-1}. Множачи обидві частини рівняння зліва на A^{-1}, одержимо

$$A^{-1}Ax= A^{-1}\, b$$

або

$$x= A^{-1}\, b.$$

В результаті отримано вектор, компонентами якого є шукані невідомі.

Розглянемо систему рівнянь з трьома невідомими

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ x_1 + 5x_2 + 5x_3 = 10 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 11 \end{cases}$$

Запишемо її в матричній формі $Ax=b$, де

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 1 & 5 & 5 \\ 5 & 1 & 2 \end{pmatrix},\ b = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 11 \end{pmatrix},\ x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Введемо в електронну таблицю в діапазон комірок A4:C6 матрицю A, в D4:D6 – стовпець вільних членів b (рис. 2.1). За допомогою функції масиву МОПРЕД() обчислимо визначник системи, і результат розрахунку розмістимо в комірці C8. Оскільки $det\ A=32\neq 0$, то система має єдиний розв'язок, і існує обернена матриця A^{-1}. За допомогою функції МОБР() знайдемо матрицю, обернену матриці A, і розташуємо її у комірках діапазону A11:C13. В результаті множення матриці A на обернену матрицю A^{-1} з використанням функції масиву МУМНОЖ(), отримаємо одиничну матрицю E, розміщену в діапазоні комірок A16:C18. Помноживши обернену матрицю A^{-1} на вектор b, одержимо розв'язок системи лінійних рівнянь, записаний у діапазоні комірок D16:D18. Отже $x_1 = 1{,}563$; $x_2 = 0{,}188$; $x_3 = 1{,}500$.

C8 | =МОПРЕД(A4:C6)

	A	B	C	D
1	**Розв'язання системи рівнянь за допомогою оберненої матриці**			
2	Матриця коефіцієнтів			Вектор правої частини
3		A[3;3]		b
4	2	2	1	5
5	1	5	5	10
6	5	1	2	11
7				
8	Визначник:		32	
9				
10		A^{-1}[3;3]		
11	0,156	-0,094	0,156	
12	0,719	-0,031	-0,281	
13	-0,750	0,250	0,250	
14				
15		$E=A^{-1}*A$		$x= A^{-1}*b$
16	1	0	0	1,563
17	0	1	0	0,188
18	0	0	1	1,500

Рис. 2.1. Розв'язання СЛАР за допомогою оберненої матриці

Робота №7. Розв'язати систему рівнянь, використовуючи функції масиву МОПРЕД(), МОБР(), МУМНОЖ() для обчислення визначника матриці, оберненої матриці та множення матриць.

№	Система	№	Система
1.	$\begin{cases} 5x_1 + 8x_2 - x_3 = 7 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 9 \end{cases}$	2.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 1 \\ 2x_1 + 7x_2 - x_3 = 8 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{cases}$	4.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 31 \\ 5x_1 + x_2 + 2x_3 = 29 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 10 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} 4x_1 - 3x_2 + x_3 = 9 \\ 2x_1 + 5x_2 - 3x_3 = 4 \\ 5x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 18 \end{cases}$	6.	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 11 \\ 3x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 11 \end{cases}$

№	Система	№	Система
7.	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - x_2 + 2x_3 = -4 \\ 4x_1 + x_2 + 4x_3 = -2 \end{cases}$	8.	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 = 5 \\ -2x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + 4x_3 = 15 \end{cases}$
9.	$\begin{cases} 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \\ 2x_1 - 5x_2 - 3x_3 = -17 \\ x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$	10.	$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases}$
11.	$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 6 \\ 3x_1 - x_2 + x_3 = 4 \end{cases}$	12.	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 - 3x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 - 5x_3 = 8 \\ 2x_2 + 7x_3 = 17 \end{cases}$
13.	$\begin{cases} x_1 + 5x_2 + x_3 = -7 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 = 28 \end{cases}$	14.	$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - 4x_3 = 16 \\ 3x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 12 \end{cases}$
15.	$\begin{cases} 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 = -1 \\ x_1 + 5x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$	16.	$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 7 \\ x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \\ 2x_2 - x_3 = 2 \end{cases}$

2.2. Розв’язання систем лінійних рівнянь за формулами Крамера

Якщо визначник системи лінійних рівнянь $\Delta = det\ A \neq 0$, то її розв’язок може бути знайдений за формулами Крамера

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta},\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \ldots,\ x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta},$$

де $\Delta_i, i = \overline{1,n}$ – визначники, отримані з визначника системи Δ шляхом заміни його i-го стовпця стовпцем вільних членів системи рівнянь b.

Введемо в електронну таблицю в діапазон комірок A3:D7 матрицю A, в E4:E7 – стовпець вільних членів b (рис. 2.2).

Допоміжні матриці A_i, отримані заміною i-го стовпця матриці A стовпцем вільних членів, розташуємо в діапазонах A10:D13, F10:I13, A15:D18, F15:I18 відповідно. Застосовуючи функції масиву МОПРЕД(), обчислимо визначники $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4, \Delta$ в комірках A22, B22, C22, D22, E22 відповідно. Формули матимуть вигляд:

=МОПРЕД(A10:D13)	=МОПРЕД(F10:I13)	=МОПРЕД(A15:D18)	=МОПРЕД(F15:I18)	=МОПРЕД(A4:D7)

Введемо в комірку A25 формулу =A22/$E$22 для обчислення невідомого x_1. Адреса комірки, в якій міститься значення визначника, вибрана абсолютною. При копіюванні цієї формули в діапазон комірок A25:D25 в процесі використання механізму автозаповнення адреса комірки $E$22 залишиться незмінною, і всі формули в комірках діапазону будуть посилатися на число в цій комірці:

=A22/$E$22	=B22/$E$22	=C22/$E$22	=D22/$E$22

E22 | f_x =МОПРЕД(A4:D7)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Розв'язання системи за формулами Крамера**								
2	Коефіцієнти матриці				Вільні члени				
3	x_1	x_2	x_3	x_4					
4	2	1	-2	1	1				
5	3	4	1	-3	-7				
6	4	-2	3	-4	3				
7	2	2	-3	-1	-11				
8									
9	Допоміжні матриці								
10	1	1	-2	1		2	1	-2	1
11	-7	4	1	-3		3	-7	1	-3
12	3	-2	3	-4		4	3	3	-4
13	-11	2	-3	-1		2	-11	-3	-1
14									
15	2	1	1	1		2	1	-2	1
16	3	4	-7	-3		3	4	1	-7
17	4	-2	3	-4		4	-2	3	3
18	2	2	-11	-1		2	2	-3	-11
19									
20	Обчислення визначників								
21	Δ_1	Δ_2	Δ_3	Δ_4	Δ				
22	-370	185	-555	-740	-185				
23									
24	Обчислення невідомих								
25	2	-1	3	4					

Рис. 2.2. Розв'язання системи за формулами Крамера

Робота №8. Розв'язати систему рівнянь за формулами Крамера, використовуючи функції масиву

№	Система	№	Система
1.	$\begin{cases} x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 - 2x_4 = -4 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = -6 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = -4 \end{cases}$	2.	$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 6 \\ x_1 - x_2 - 2x_3 - 3x_4 = 8 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = -8 \end{cases}$

№	Система	№	Система
3.	$\begin{cases} x_1+2x_2+3x_3+4x_4=5 \\ 2x_1+x_2+2x_3+3x_4=1 \\ 3x_1+2x_2+x_3+2x_4=1 \\ 4x_1+3x_2+2x_3+x_4=-5 \end{cases}$	4.	$\begin{cases} x_1-3x_3+4x_4=-5 \\ x_1-2x_3+3x_4=-4 \\ 3x_1+2x_2-5x_4=12 \\ 4x_1+3x_2-5x_3=5 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} x_1+3x_2+5x_3+7x_4=12 \\ 3x_1+5x_2+7x_3+x_4=0 \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4=4 \\ 7x_1+x_2+3x_3+5x_4=16 \end{cases}$	6.	$\begin{cases} x_1+5x_2+3x_3-4x_4=20 \\ 3x_1+x_2-2x_3=9 \\ 5x_1-7x_2+10x_4=-9 \\ 3x_2-5x_3=1 \end{cases}$
7.	$\begin{cases} 2x_1+x_2-5x_3+x_4=8 \\ x_1-3x_2-6x_4=9 \\ 2x_2-x_3+2x_4=-5 \\ x_1+4x_2-7x_3+6x_4=0 \end{cases}$	8.	$\begin{cases} 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=4 \\ 3x_1+3x_2+3x_3+2x_4=6 \\ 3x_1-x_2-x_3+2x_4=6 \\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4=6 \end{cases}$
9.	$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=8 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=5 \\ x_1-x_2+2x_3+x_4=-1 \\ x_1+x_2-x_3+3x_4=10 \end{cases}$	10.	$\begin{cases} 4x_1+x_2-x_4=-9 \\ x_1-3x_2+4x_3=-7 \\ 3x_2-2x_3+4x_4=12 \\ x_1+2x_2-x_3-3x_4=0 \end{cases}$
11.	$\begin{cases} 2x_1-x_2+x_3-x_4=1 \\ 2x_1-x_2-3x_4=2 \\ 3x_1-x_3+x_4=-3 \\ 2x_1+2x_2-2x_3+5x_4=-6 \end{cases}$	12.	$\begin{cases} x_1+x_2-x_3-x_4=0 \\ x_2+2x_3-x_4=2 \\ x_1-x_2-x_4=-1 \\ -x_1+3x_2-2x_3=0 \end{cases}$
13.	$\begin{cases} 5x_1+x_2-x_4=-9 \\ 3x_1-3x_2+x_3+4x_4=-7 \\ 3x_1-2x_3+x_4=-16 \\ x_1-4x_2+x_4=0 \end{cases}$	14.	$\begin{cases} 2x_1+x_3+4x_4=9 \\ x_1+2x_2-x_3+x_4=8 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4=5 \\ x_1-x_2+2x_3+x_4=-1 \end{cases}$
15.	$\begin{cases} 2x_1-6x_2+2x_3+2x_4=12 \\ x_1+3x_2+5x_3+7x_4=12 \\ 3x_1+5x_2+7x_3+x_4=0 \\ 5x_1+7x_2+x_3+3x_4=4 \end{cases}$	16.	$\begin{cases} x_1+5x_2=2 \\ 2x_1-x_2+3x_3+2x_4=4 \\ 3x_1-x_2-x_3+2x_4=6 \\ 3x_1-x_2+3x_3-x_4=6 \end{cases}$

2.3. Розв’язання систем лінійних рівнянь за методом Гаусса (схема єдиного ділення)

Найпоширенішим методом розв’язання систем лінійних алгебраїчних рівнянь є метод Гаусса, в основі якого лежить ідея послідовного виключення невідомих. Суть методу полягає в тому, що система рівнянь приводиться до еквівалентної їй системи з трикутною верхньою матрицею (прямий хід виключень). Із отриманої таким способом системи невідомі знаходяться послідовними підстановками (обернений хід виключень). Найпростішим варіантом методу є схема єдиного ділення, яка полягає у наступному.

Вважаючи, що коефіцієнт $a_{11} \neq 0$ (ведучий елемент) поділимо на a_{11} перше рівняння системи, в результаті чого отримаємо нове рівняння

$$x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n = g_1,$$

де $c_{1j} = \dfrac{a_{1j}}{a_{11}}, j \geq 2$, $g_1 = \dfrac{b_1}{a_{11}}$. Для виключення x_1 з усіх наступних рівнянь системи, починаючи з другого, слід множити отримане рівняння на $a_{21}, a_{31}, \ldots, a_{n1}$ і віднімати відповідно з другого, третього і т.д. рівнянь системи. Перетворені рівняння будуть мати вигляд

$$\begin{cases} a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{2n}^{(1)}x_n = b_2^{(1)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n2}^{(1)}x_2 + a_{n3}^{(1)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(1)}x_n = b_n^{(1)} \end{cases},$$

де

$$a_{ij}^{(1)} = a_{ij} - a_{i1}c_{1j}, i, j \geq 2, b_i^{(1)} = b_i - a_{i1}g_1.$$

Аналогічним перетворенням піддамо отримано систему. Будемо вважати, що ведучий на другому кроці коефіцієнт $a_{22}^{(1)} \neq 0$. Поділимо коефіцієнти рівняння на $a_{22}^{(1)}$, в результаті чого отримаємо рівняння

$$x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n = g_2,$$

де $c_{2j} = \dfrac{a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, j \geq 3$, $g_2 = \dfrac{b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}$. Виключаючи далі x_2 з усіх наступних рівнянь системи, приходимо до рівнянь

$$\begin{cases} a_{33}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{3n}^{(2)}x_n = b_3^{(2)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{n3}^{(2)}x_3 + \ldots + a_{nn}^{(2)}x_n = b_n^{(2)} \end{cases},$$

де

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - a_{i2}^{(1)}c_{2j}, i, j \geq 3, b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - a_{i2}^{(1)}g_2.$$

Продовжуючи цей процес до m-го кроку, одержимо

$$\begin{cases} x_m + c_{mm+1}x_{m+1} + \ldots + c_{mn}x_n = g_m \\ a_{m+1m+1}^{(m)}x_{m+1} + \ldots + a_{m+1n}^{(m)}x_n = b_{m+1}^{(m)} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{nm+1}^{(m)}x_{m+1} + \ldots + a_{nn}^{(m)}x_n = b_n^{(m)} \end{cases},$$

де $c_{mj} = \dfrac{a_{mj}^{(m-1)}}{a_{mm}^{(m-1)}}, j \geq m+1$, $g_m = \dfrac{b_m^{(m-1)}}{a_{mm}^{(m-1)}}$, $a_{ij}^{(m)} = a_{ij}^{(m-1)} - a_{im}^{(m-1)}c_{mj}, i, j \geq m+1, b_i^{(m)} = b_i^{(m-1)} - a_{im}^{(m-1)}g_m$

Припустивши, що крок номера m є останнім кроком перетворення, тобто $m=n$, після перетворень ми отримаємо систему $Cx=g$ або в розгорнутій формі

$$\begin{cases} x_1 + c_{12}x_2 + c_{13}x_3 + \ldots + c_{1n}x_n = g_1 \\ \qquad x_2 + c_{23}x_3 + \ldots + c_{2n}x_n = g_2 \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_n = g_n \end{cases}$$

з трикутною матрицею C, еквівалентну початковій системі. З цієї системи значення невідомих знаходяться послідовно від x_n до x_1 за формулами

$$\begin{cases} x_n = g_n \\ x_k = g_k - c_{kk+1}x_{k+1} - \ldots - c_{kn}x_n \quad (k = n-1, n-2, \ldots, 1) \end{cases}$$

Введемо в електронну таблицю в діапазон комірок A3:C6 матрицю A, в D4:D6 – стовпець вільних членів b (рис. 2.2).

A8 | fx =A4/$A4

	A	B	C	D
1	**Схема єдиного ділення**			
2	Коефіцієнти при невідомих			Вільні члени
3	x_1	x_2	x_3	b
4	0,14	0,24	-0,84	1,11
5	1,07	-0,83	0,56	0,48
6	0,64	0,43	-0,38	-0,83
7	Прямий хід			
8	1	1,71429	-6	7,92857143
9	0	2,66429	-6,98	8,00357143
10	0	0,66714	-3,46	5,90428571
11				
12		1	-2,6198	3,00402145
13		0	1,71219	-3,9001743
14				
15			1	-2,2778823
16	Обернений хід			
17			1	-2,2778823
18		1		-2,9636639
19	1			-0,658156

Рис. 2.2. Схема єдиного ділення

В комірку A8 введемо формулу =A4/$A4, яку скопіюємо в діапазон комірок A8:D8. В результаті в комірці A8 отримаємо коефіцієнт 1, в комірках B8 і C8 – коефіцієнти c_{12} і c_{13}, в комірці D8 – вільний член g_1. В комірку A9 введемо формулу =A8*$A$5-A5, яку скопіюємо в діапазон комірок A9:D9. В результаті в комірці A9 отримаємо коефіцієнт 0 (невідоме x_1 виключене з другого рівняння), в комірках B9 і C9 – коефіцієнти $a_{22}^{(1)}$ і $a_{23}^{(1)}$, в комірці D9 – вільний член $b_2^{(1)}$. В комірку A10 введемо формулу =A8*$A$6-A6, яку скопіюємо в діапазон комірок A10:D10. В результаті отримаємо в цих комірках коефіцієнти 0, $a_{32}^{(1)}$ і $a_{33}^{(1)}$, вільний член $b_3^{(1)}$.

На другому кроці прямого ходу виключаємо невідоме x_2 з третього рівняння. В комірку B12 введемо формулу =B9/$B9, яку скопіюємо в діапазон комірок B12:D12. В результаті в комірці B12 отримаємо коефіцієнт 1, в комірках C12 – коефіцієнт c_{23}, в комірці D12 – вільний член g_2. В комірку B13 введемо формулу =B12*$B$10-B10, яку скопіюємо в діапазон комірок B13:D13. В результаті отримаємо в цих комірках коефіцієнти 0, $a_{33}^{(2)}$, вільний член $b_3^{(2)}$. На третьому кроці поділимо останнє рівняння на ведучий коефіцієнт $a_{33}^{(2)} \neq 0$. Для цього введемо в комірку C15 формулу =C13/$C13, яку скопіюємо в діапазон комірок C15:D15. В комірці C15 отримаємо коефіцієнт 1, в комірці D15 – вільний член g_3. Далі в комірки D17:D19 вводимо формули, що реалізують обернений хід методу прогонки, і отримуємо в цих комірках значення невідомих x_3, x_2, x_1. Всі формули, використані в таблиці, відображені на рис. 2.3.

A8 fx =A4/$A4

	A	B	C	D
1	**Схема єдиного ділення**			
2	Коефіцієнти при невідомих			Вільні члени
3	x_1	x_2	x_3	b
4	0,14	0,24	-0,84	1,11
5	1,07	-0,83	0,56	0,48
6	0,64	0,43	-0,38	-0,83
7	Прямий хід			
8	=A4/$A4	=B4/$A4	=C4/$A4	=D4/$A4
9	=A8*$A$5-A5	=B8*$A$5-B5	=C8*$A$5-C5	=D8*$A$5-D5
10	=A8*$A$6-A6	=B8*$A$6-B6	=C8*$A$6-C6	=D8*$A$6-D6
11				
12		=B9/$B9	=C9/$B9	=D9/$B9
13		=B12*$B$10-B10	=C12*$B$10-C10	=D12*$B$10-D10
14				
15			=C13/$C13	=D13/$C13
16	Обернений хід			
17			=C15	=D15
18		=B12		=-C12*D17+D12
19	=A8			=-B8*D18-C8*D17+D8

Рис. 2.3. Формули схеми єдиного ділення

Робота №9. Розв’язати систему рівнянь методом Гаусса за схемою єдиного ділення

№	Система	№	Система
1.	$\begin{cases} 3{,}21x_1 - 4{,}25x_2 + 2{,}13x_3 = 5{,}06 \\ 7{,}09x_1 + 1{,}17x_2 - 2{,}23x_3 = 4{,}75 \\ 0{,}43x_1 - 1{,}4x_2 - 0{,}62x_3 = -1{,}05 \end{cases}$	2.	$\begin{cases} 0{,}42x_1 - 1{,}13x_2 + 7{,}05x_3 = 6{,}15 \\ 1{,}14x_1 2{,}15x_2 + 5{,}11x_3 = -4{,}16 \\ -0{,}71x_1 + 0{,}81x_2 - 0{,}02x_3 = -0{,}17 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} 2{,}5x_1 - 3{,}12x_2 - 4{,}03x_3 = -7{,}5 \\ 0{,}61x_1 + 0{,}71x_2 - 0.05x_3 = 0{,}44 \\ -1{,}03x_1 - 2{,}05x_2 + 0{,}877x_3 = -1{,}16 \end{cases}$	4.	$\begin{cases} 0{,}10x_1 - 0{,}04x_2 - 0{,}13x_3 = -0{,}15 \\ -0{,}04x_1 + 0{,}34x_2 + 0{,}05x_3 = 0{,}31 \\ -0{,}13x_1 + 0{,}05x_2 + 0{,}63x_3 = 0{,}37 \end{cases}$

№	Система	№	Система
5.	$\begin{cases} 1{,}14x_1 - 2{,}15x_2 - 5{,}11x_3 = -4{,}16 \\ -0{,}71x_1 + 0{,}81x_2 - 0{,}02x_3 = -0{,}17 \\ 0{,}42x_1 - 1{,}13x_2 + 7{,}05x_3 = 6{,}15 \end{cases}$	6.	$\begin{cases} 0{,}61x_1 + 0{,}71x_2 - 0{,}05x_3 = 0{,}44 \\ -1{,}03x_1 - 2{,}05x_2 + 0{,}87x_3 = -1{,}16 \\ 2{,}5x_1 - 3{,}12x_2 - 5{,}03x_3 = -7{,}5 \end{cases}$
7.	$\begin{cases} 3{,}11x_1 - 1{,}66x_2 - 0{,}60x_3 = -0{,}92 \\ -1{,}65x_1 + 3{,}51x_2 - 0{,}78x_3 = 2{,}57 \\ 0{,}60x_1 + 0{,}78x_2 - 1{,}87x_3 = 1{,}65 \end{cases}$	8.	$\begin{cases} 0{,}10x_1 + 12x_2 - 0{,}13x_3 = 0{,}10 \\ 0{,}12x_1 + 0{,}71x_2 + 0{,}15x_3 = 0{,}26 \\ -0{,}13x_1 + 0{,}15x_2 + 0{,}63x_3 = 0{,}38 \end{cases}$
9.	$\begin{cases} 0{,}71x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}12x_3 = 0{,}29 \\ 0{,}10x_1 + 0{,}34x_2 - 0{,}04x_3 = 0{,}32 \\ 0{,}12x_1 - 0{,}04x_2 + 0{,}10x_3 = -0{,}10 \end{cases}$	10.	$\begin{cases} 0{,}34x_1 - 0{,}04x_2 + 0{,}10x_3 = 0{,}33 \\ -0{,}04x_1 + 0{,}10x_2 + 0{,}12x_3 = -0{,}05 \\ 0{,}10x_1 + 0{,}43x_2 - 0{,}93x_3 = 0{,}28 \end{cases}$
11.	$\begin{cases} 0{,}12x_1 - 0{,}43x_2 + 0{,}14x_3 = -0{,}17 \\ -0{,}07_1 + 0{,}34x_2 + 0{,}72x_3 = 0{,}62 \\ 1{,}183x_1 - 0{,}08x_2 - 0{,}25x_3 = 1{,}12 \end{cases}$	12.	$\begin{cases} 1{,}17x_1 + 0{,}53x_2 - 0{,}84x_3 = 1{,}15 \\ 0{,}64x_1 - 0{,}72x_2 - 0{,}43x_3 = 0{,}15 \\ 0{,}32x_1 + 0{,}42x_2 - 0{,}93x_3 = -0{,}48 \end{cases}$
13.	$\begin{cases} 0{,}66x_1 - 1{,}44x_2 - 0{,}18x_3 = 1{,}83 \\ 0{,}48x_1 - 0{,}24x_2 + 0{,}37x_3 = -0{,}84 \\ 0{,}86x_1 + 0{,}43x_2 + 0{,}64x_3 = 0{,}64 \end{cases}$	14.	$\begin{cases} 0{,}821x_1 + 0{,}43x_2 - 0{,}57x_3 = 0{,}48 \\ -0{,}35x_1 + 1{,}12x_2 - 0{,}48x_3 = 0{,}52 \\ 0{,}48x_1 + 0{,}23x_2 + 0{,}37x_3 = 1{,}44 \end{cases}$
15.	$\begin{cases} 1{,}6x_1 + 0{,}12_2 + 0{,}57x_3 = 0{,}18 \\ 0{,}38x_1 + 0{,}25x_2 - 54x_3 = 0{,}63 \\ 0{,}28x_1 + 0{,}46x_2 - 1{,}12x_3 = 0{,}88 \end{cases}$	16.	$\begin{cases} 1{,}16x_1 + 1{,}3x_2 - 1{,}14x_3 = 0{,}43 \\ 0{,}83x_1 - 0{,}48x_2 - 2{,}44x_3 = -0{,}15 \\ 23x_1 - 0{,}16x_2 + 1{,}3x_3 = 1{,}5 \end{cases}$

2.4. Обчислення визначника та обернення матриці за схемою Гаусса

Метод Гаусса можна використовувати для обчислення визначника системи лінійних алгебраїчних рівнянь $Ax=b$. За схемою єдиного ділення ця система зводиться до системи $Cx=g$ з верхньою трикутною матрицею з одиницями на головній діагоналі. Елементи цієї матриці визначаються з елементів матриці A і подальших допоміжних матриць за допомогою таких елементарних перетворень:

1) ділення на ведучі елементи a_{11}, $a_{22}^{(1)}$, ... , $a_{nn}^{(n-1)}$;

2) віднімання з рядків матриці A і проміжних матриць чисел, пропорційних елементам відповідних ведучих рядків.

При першій операції визначник матриці також ділиться на відповідний ведучий елемент, при другій – не змінюється. Тому

$$\det C = 1 = \frac{\det A}{a_{11}a_{22}^{(1)}\dots a_{nn}^{(n-1)}} \rightarrow \det A = a_{11}a_{22}^{(1)}\dots a_{nn}^{(n-1)}$$

Обчислення визначника виконаємо в таблиці на рис. 2.4. Тут ведучі елементи a_{11}, $a_{22}^{(1)}$, ... , $a_{nn}^{(n-1)}$ знаходяться в комірках A4, B10, C15, D19 відповідно. Результат розрахунків – значення визначника матриці A, відображається в комірці B22.

B22 | f_x =A4*B10*C15*D19

	A	B	C	D
1	**Обчислення визначника за схемою єдиного ділення**			
2	Коефіцієнти при невідомих			
3	x_1	x_2	x_3	x_4
4	0,32	0,54	0,67	-0,82
5	0,84	0,88	-0,35	0,71
6	1,02	0,32	0,48	0,57
7	-0,18	0,64	-0,24	0,43
8	Прямий хід			
9	1	1,6875	2,09375	-2,5625
10	0	0,5375	2,10875	-2,8625
11	0	1,40125	1,655625	-3,18375
12	0	-0,9438	-0,136875	0,03125
13				
14		1	3,92325581	-5,3255814
15		0	3,84183721	-4,2787209
16		0	-3,5656977	4,99476744
17				
18			1	-1,1137174
19			0	-1,0235879
20				
21	Обернений хід			
22	Δ	-0,6764		

Рис. 2.4. Обчислення визначника за схемою єдиного ділення

Схему єдиного ділення можна застосовувати і для знаходження оберненої матриці.

Нехай A=(a_{ij}), A^{-1}=(x_{ij}), $A\,A^{-1} = E$,

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_{kj} = \delta_{ij}, i, j = \overline{1, n}, \quad \delta_{ij} = \begin{cases} 1, i = j \\ 0, i \neq j \end{cases}.$$

Одержані n систем лінійних алгебраїчних рівнянь, що мають одну й ту саму матрицю A і різні вільні члени, можна одночасно розв’язати методом Гаусса. Обчислення оберненої матриці виконаємо в таблиці на рис. 2.5.

Обернена матриця, представлена у діапазоні комірок E25:H28, має вигляд

$$
A^{-1} = \begin{pmatrix} 1{,}19537 & -0{,}3114 & -0{,}8168 & -0{,}1159 \\ -0{,}1734 & 1{,}57376 & 1{,}23232 & 0{,}69718 \\ -1{,}75 & 0{,}1105 & 0{,}30438 & 0{,}86879 \\ -0{,}119 & -2{,}9229 & -1{,}0939 & 0{,}17152 \end{pmatrix}
$$

E28 fx =-B10*E27-C10*E26-D10*E25+E10

	A	B	C	D	E	F	G	H
1	**Обчислення оберненої матриці за схемою єдиного ділення**							
2	Коефіцієнти при невідомих				Вільні члени			
3	x_1	x_2	x_3	x_4				
4	0,32	0,52	-0,42	0,23	1	0	0	0
5	0,44	-0,25	0,36	-0,51	0	1	0	0
6	-1,06	0,74	-0,83	0,48	0	0	1	0
7	0,96	0,82	0,55	0,36	0	0	0	1
8								
9	Прямий хід							
10	1	1,625	-1,3125	0,71875	3,125	0	0	0
11	0	0,965	-0,9375	0,82625	1,375	-1	0	0
12	0	-2,4625	2,22125	-1,2419	-3,3125	0	-1	0
13	0	0,74	-1,81	0,33	3	0	0	-1
14								
15		1	-0,9715	0,85622	1,42487	-1,0363	0	0
16		0	0,17108	-0,8666	-0,1962	2,55181	1	0
17		0	1,09109	0,3036	-1,9456	-0,7668	0	1
18								
19			1	-5,0654	-1,1471	14,9163	5,84539	0
20			0	-5,8304	0,69399	17,0419	6,37783	-1
21								
22				1	-0,119	-2,9229	-1,0939	0,17152
23								
24	Обернений хід							
25				1	-0,119	-2,9229	-1,0939	0,17152
26			1		-1,75	0,1105	0,30438	0,86879
27		1			-0,1734	1,57376	1,23232	0,69718
28	1				1,19537	-0,3115	-0,8168	-0,1159

Рис.2.5. Обчислення оберненої матриці за схемою єдиного ділення

Робота №10. Завдання:

1) Знайти обернену матрицю за схемою єдиного ділення
2) Обчислити визначник за схемою Гаусса.

№	1)	2)
1.	$\begin{pmatrix} 1,00 & 0,47 & -0,11 & 0,55 \\ 0,42 & 1,00 & 0,35 & 0,17 \\ -0,25 & 0,67 & 1,00 & 0,36 \\ 0,54 & -0,32 & -0,74 & 1,00 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1,00 & 0,42 & 0,54 & 0,66 \\ 0,42 & 1,00 & 0,32 & 0,44 \\ 0,54 & 0,32 & 1,00 & 0,22 \\ 0,66 & 0,44 & 0,22 & 1,00 \end{vmatrix}$
2.	$\begin{pmatrix} 0,15 & 0,23 & 0,12 & 0,44 \\ -0,52 & 0,35 & 0,21 & -0,72 \\ 0,35 & 0,42 & 0,38 & -0,63 \\ 0,74 & -0,25 & 0,37 & 0,55 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1,00 & 0,17 & -0,25 & 0,54 \\ 0,47 & 1,00 & 0,67 & -0,32 \\ -0,11 & 0,35 & 1,00 & -0,74 \\ 0,55 & 0,43 & 0,36 & 1,00 \end{vmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} 0,75 & 0,16 & 0,27 & 0,83 \\ 0,55 & 0,22 & -0,12 & 0,32 \\ 1,00 & 0,42 & 0,35 & 0,18 \\ -0,37 & 0,23 & 0,15 & 0,28 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 8,2 & 1,4 & -2,3 & 0,2 \\ -1,6 & 5,4 & -7,7 & 3,1 \\ 0,7 & 1,9 & -8,5 & 4,8 \\ 5,3 & -5,9 & 2,7 & -7,9 \end{vmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} 1,5 & 2,7 & -1,3 & 5,2 \\ 2,7 & -3,4 & 1,8 & 2,2 \\ -1,3 & 0,16 & 0,82 & 1,05 \\ 5,2 & 2,2 & 1,05 & 3,4 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0,42 & 1,00 & 0,32 & 0,44 \\ 1,00 & 0,42 & 0,54 & 0,66 \\ 0,66 & 0,44 & 0,22 & 1,00 \\ 0,54 & 0,32 & 1,00 & 0,22 \end{vmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} 1,17 & 2,13 & 0,32 & 0,56 \\ 2,13 & 0,82 & -0,72 & 1,10 \\ 0,32 & 0,25 & -0,42 & 0,16 \\ 0,56 & 1,10 & -0,25 & -0,44 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0,47 & 1,00 & 0,67 & -0,32 \\ 1,00 & 0,17 & -0,25 & 0,54 \\ 0,55 & 0,43 & 0,36 & 1,00 \\ -0,11 & 0,35 & 1,00 & -0,74 \end{vmatrix}$
6.	$\begin{pmatrix} 1,2 & 3,2 & -1,5 & 2,7 \\ -5,3 & 4,1 & 3,8 & 1,7 \\ 0,3 & 1,5 & -1,6 & 4,2 \\ 1,6 & 4,5 & 6,3 & -1,2 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1,6 & 5,4 & -7,7 & 3,1 \\ 8,2 & 1,4 & -2,3 & 0,2 \\ 5,3 & -5,9 & 2,7 & -7,9 \\ 0,7 & 1,9 & -8,5 & 4,8 \end{vmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} 0,62 & 0,73 & -0,43 & -0,23 \\ 0,73 & 1,00 & 0,25 & 0,64 \\ -0,41 & 0,62 & 0,21 & 0,44 \\ 0,84 & 0,32 & 0,18 & -0,47 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0,25 & 0,16 & 0,35 & 0,18 \\ 1,2 & -0,8 & 0,62 & 0,34 \\ 0,83 & 0,48 & -0,18 & 0,72 \\ 0,43 & 0,57 & 0,62 & -0,13 \end{vmatrix}$
8.	$\begin{pmatrix} 1,13 & 2,15 & 0,83 & 0,77 \\ 0,84 & -0,43 & 0,62 & -0,32 \\ 2,32 & 1,15 & 1,84 & 0,68 \\ -0,72 & 0,53 & 0,64 & -0,57 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} -1,6 & 5,4 & -7,7 & 3,1 \\ 8,2 & 1,4 & -2,3 & 0,2 \\ 5,3 & -5,9 & 2,7 & -7,9 \\ 0,7 & 1,9 & -8,5 & 4,8 \end{vmatrix}$
9.	$\begin{pmatrix} 0,42 & 0,26 & 0,33 & -0,22 \\ 0,74 & -0,53 & 0,28 & -0,65 \\ 0,88 & 0,42 & -0,33 & 0,75 \\ 0,92 & 0,82 & -0,62 & 0,75 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1,00 & 2,14 & 0,42 & -1,13 \\ 0,23 & 0,42 & -1,5 & 0,16 \\ 0,34 & -0,12 & 0,18 & 0,57 \\ 0,83 & -0,17 & 0,62 & -0,83 \end{vmatrix}$

№	1)	2)
10.	$\begin{pmatrix} 0{,}75 & 0{,}18 & 0{,}63 & -0{,}32 \\ 0{,}92 & 0{,}38 & -0{,}14 & 0{,}56 \\ 0{,}63 & -0{,}42 & 0{,}18 & 0{,}37 \\ -0{,}65 & 0{,}52 & 0{,}47 & 0{,}27 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0{,}92 & 0{,}16 & -0{,}23 & 0{,}8 \\ 0{,}16 & 0{,}12 & 0{,}15 & 0{,}72 \\ -0{,}23 & 0{,}15 & 0{,}88 & 0{,}16 \\ 0{,}8 & 0{,}72 & -0{,}13 & 0{,}72 \end{vmatrix}$
11.	$\begin{pmatrix} -2{,}41 & 7{,}55 & 0{,}82 & 0{,}33 \\ 0{,}28 & -3{,}44 & 0{,}75 & 0{,}23 \\ 0{,}17 & 0{,}28 & 0{,}05 & 3{,}48 \\ -1{,}00 & 0{,}23 & 2{,}00 & 7{,}00 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1{,}13 & 0{,}15 & 0{,}26 & -0{,}13 \\ 0{,}45 & 0{,}62 & -0{,}80 & 0{,}74 \\ 0{,}62 & -1{,}12 & 0{,}64 & 0{,}78 \\ -0{,}13 & 0{,}73 & 0{,}16 & -0{,}36 \end{vmatrix}$
12.	$\begin{pmatrix} -1{,}09 & 7{,}56 & 3{,}45 & 0{,}78 \\ 3{,}33 & 4{,}45 & -0{,}21 & 3{,}44 \\ 2{,}33 & -4{,}45 & 0{,}17 & 2{,}21 \\ 4{,}08 & 1{,}00 & 3{,}05 & 0{,}11 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0{,}84 & 1{,}32 & 0{,}48 & -1{,}13 \\ 1{,}16 & -0{,}46 & 0{,}64 & -0{,}13 \\ 0{,}44 & 0{,}83 & -1{,}12 & 0{,}44 \\ 0{,}16 & 0{,}32 & 0{,}08 & -0{,}57 \end{vmatrix}$
13.	$\begin{pmatrix} 4{,}5 & 4{,}8 & -3{,}7 & 2{,}1 \\ 4{,}5 & -3{,}7 & 5{,}6 & 3{,}3 \\ 4{,}8 & 7{,}5 & 8{,}3 & 9{,}2 \\ -1{,}5 & 2{,}3 & 4{,}8 & 3{,}1 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0{,}52 & 0{,}83 & -1{,}2 & 0{,}32 \\ 0{,}63 & -0{,}42 & 0{,}57 & 1{,}15 \\ 0{,}44 & 0{,}52 & 0{,}44 & 0{,}18 \\ 0{,}62 & -0{,}12 & 0{,}08 & 0{,}42 \end{vmatrix}$
14.	$\begin{pmatrix} 5{,}5 & 3{,}7 & -8{,}3 & 9{,}1 \\ -4{,}5 & 6{,}8 & 7{,}2 & 3{,}4 \\ 7{,}5 & -4{,}9 & 3{,}5 & 7{,}1 \\ 5{,}6 & -4{,}8 & 7{,}3 & 5{,}3 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 1{,}5 & 0{,}84 & 0{,}63 & -0{,}18 \\ 0{,}15 & 0{,}36 & -0{,}16 & 0{,}88 \\ -0{,}27 & 0{,}45 & 0{,}64 & -0{,}38 \\ 0{,}41 & -0{,}83 & 0{,}62 & 0{,}27 \end{vmatrix}$
15.	$\begin{pmatrix} 1{,}8 & 1{,}02 & 1{,}03 & 1{,}05 \\ 7{,}08 & 8{,}04 & 9{,}05 & 6{,}08 \\ 1{,}11 & -2{,}02 & 2{,}03 & -3{,}04 \\ -3{,}41 & 4{,}52 & 7{,}28 & 5{,}51 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 0{,}8 & 1{,}3 & -0{,}12 & 0{,}25 \\ -1{,}2 & 0{,}18 & 0{,}72 & 0{,}13 \\ 1{,}6 & 0{,}2 & 0{,}12 & -0{,}11 \\ 1{,}4 & 0{,}15 & -0{,}83 & 0{,}41 \end{vmatrix}$
16.	$\begin{pmatrix} 1{,}71 & 3{,}56 & -0{,}33 & 0{,}17 \\ 2{,}81 & 3{,}45 & 0{,}17 & -0{,}22 \\ -0{,}34 & 0{,}75 & 0{,}33 & 0{,}22 \\ 7{,}03 & -3{,}45 & 0{,}32 & 0{,}17 \end{pmatrix}$	$\begin{vmatrix} 2{,}5 & 0{,}35 & 0{,}4 & -0{,}8 \\ 0{,}2 & -1{,}5 & 0{,}61 & 2{,}3 \\ 0{,}16 & -0{,}42 & 0{,}57 & 0{,}63 \\ 0{,}23 & 0{,}15 & -0{,}08 & 3{,}1 \end{vmatrix}$

2.5. Розв’язання систем лінійних рівнянь методом головних елементів

Схема єдиного ділення може бути реалізована лише у випадку, коли всі ведучі елементи відмінні від нуля. Проте ця обставина невідома до початку обчислень, крім того близькість ведучих елементів до нуля може бути причиною значної втрати точності. Тому дану схему модифікують, застосовуючи схему єдиного ділення з вибором максимального елемента по рядку, стовпцю або по всій матриці.

Схема Гаусса з вибором головного елемента по всій матриці полягає у наступному. Записуємо розширену за рахунок стовпця вільних членів прямокутну матрицю коефіцієнтів системи *M*. Серед елементів матриці a_{ij} $(i, j = 1, \ldots, n)$ виберемо найбільший за модулем, що називається головним елементом. Нехай ним буде, наприклад, елемент a_{pq}. Рядок з номером *p*, що містить головний елемент, називається головним рядком.

Далі обчислюємо множники $m_i = \dfrac{a_{iq}}{a_{pq}}$ для всіх $i \neq p$.

Потім перетворюємо матрицю так: з кожного *i*-го неголовного рядка віднімаємо почленно головний рядок, помножений на m_i. В результаті одержимо матрицю, в якій всі елементи *q*-го стовпця, за виключенням a_{pq}, дорівнюють нулю. Відкидаючи цей стовпець і головний рядок, отримаємо нову матрицю M_1 з меншою на одиницю кількістю рядків і стовпців.

Над матрицею M_1 повторюємо ті ж самі операції, після чого одержимо матрицю M_2, і т.д. Аналогічні перетворення продовжуємо, поки не отримаємо матрицю, що містить один рядок з двох елементів, що теж вважається головним. Потім об'єднуємо усі головні рядки, починаючи з останнього. На цьому етапі закінчується прямий хід обчислень. З отриманої системи крок за кроком знаходимо значення невідомих. Цей етап називається оберненим ходом. Описані обчислення можна розташувати в одній таблиці.

Введемо в електронну таблицю в діапазон комірок A4:D6 матрицю *A*, в E4:E6 – стовпець вільних членів *b* (рис. 2.6).

A4 | fx =D4/D$4

	A	B	C	D	E
1	**Схема з вибором головного елементу**				
2	m_i	Коефіцієнти при невідомих			Вільні члени
3		x_1	x_2	x_3	b
4	1	2,74	-1,18	3,17	2,18
5	-0,68139	1,12	0,83	-2,16	-1,15
6	0,239748	0,18	1,27	0,76	3,23
7					
8	Прямий хід				
9	1	2,987003	0,025962	0	0,335425868
10	-0,15966	-0,47691	1,552902	0	2,707350158
11					
12		0	1,557047	0	2,760904655
13					
14	Обернений хід				
15			1,773167		
16		0,096883			
17				1,263999	

Рис. 2.6. Схема з вибором головного елемента

Знаходимо головний елемент. У даній системі ним буде коефіцієнт $a_{13}\ (p=1, q=3)$, розташований в комірці D4, підкреслюємо його.

Знаходимо числа $m_i\ (i=1,2,3)$. Для цього ділимо елементи третього стовпця a_{i3} на a_{13}, і результати записуємо в стовпець m_i в комірки діапазону A4:A6.

Обчислюємо коефіцієнти нової матриці. З кожного i-го рядка (i=2,3) віднімаємо головний рядок, помножений на відповідний елемент m_i. Розташуємо знайдені елементи в комірках діапазону B9:E10.

Знаходимо головний елемент нової матриці. Ним буде коефіцієнт $a_{11}^{(1)}$, розташований в комірці B9, підкреслюємо його.

Ділимо елементи першого стовпця $a_i^{(1)}$ на $a_{11}^{(1)}$, і результати записуємо в стовпець m_i в комірки діапазону B9:B10.

Обчислюємо коефіцієнти нової матриці. З другого рядка віднімаємо головний рядок, помножений на елемент m_2, розташований в комірці B10. Запишемо знайдені елементи в комірках діапазону B12:E12.

Результати обчислень при реалізації прямого ходу (значення невідомих x_2, x_1, x_3) записуємо відповідно у комірках C15, B16, D17.

Всі формули, використані в таблиці, відображені на рис. 2.7.

E17 fx

	A	B	C	D	E
1	**Схема з вибором головного елементу**				
2	m_i	Коефіцієнти при невідомих			Вільні члени
3		x_1	x_2	x_3	b
4	=D4/D$4	2,74	-1,18	3,17	2,18
5	=D5/D$4	1,12	0,83	-2,16	-1,15
6	=D6/D$4	0,18	1,27	0,76	3,23
7					
8	Прямий хід				
9	=B9/B$9	=B5-B$4*$A5	=C5-C$4*$A5	=D5-D$4*$A5	=E5-E$4*$A5
10	=B10/B$9	=B6-B$4*$A6	=C6-C$4*$A6	=D6-D$4*$A6	=E6-E$4*$A6
11					
12		=B10-B9*$A10	=C10-C9*$A10	=D10-D9*$A10	=E10-E9*$A10
13					
14	Обернений хід				
15			=E12/C12		
16		=(E9-C9*C15)/B9			
17				=(E4-B4*B16-C4*C15)/D4	

Рис. 2.7. Формули для обчислень за схемою з вибором головних елементів

Робота №11. Розв'язати систему рівнянь методом головних елементів

№	Система	№	Система
1.	$\begin{cases}0{,}34x_1+0{,}71x_2+0{,}63x_3=2{,}08\\0{,}71x_1-0{,}65x_2-0{,}18x_3=0{,}17\\1{,}17x_1-2{,}35x_2+0{,}75x_3=1{,}28\end{cases}$	2.	$\begin{cases}3{,}75x_1-0{,}28x_2+0{,}17x_3=0{,}75\\2{,}11x_1-0{,}11x_2-0{,}12x_3=1{,}11\\0{,}22x_1-3{,}17x_2+1{,}81x_3=0{,}05\end{cases}$
3.	$\begin{cases}0{,}21x_1-0{,}18x_2+0{,}75x_3=0{,}11\\0{,}13x_1+0{,}75x_2-0{,}11x_3=2{,}00\\3{,}01x_1-0{,}33x_2+0{,}11x_3=0{,}13\end{cases}$	4.	$\begin{cases}0{,}13x_1-0{,}14x_2-2{,}00x_3=0{,}15\\0{,}75x_1+0{,}18x_2-0{,}77x_3=0{,}11\\0{,}28x_1-0{,}17x_2+0{,}39x_3=0{,}12\end{cases}$
5.	$\begin{cases}3{,}01x_1-0{,}14x_2-0{,}15x_3=1{,}00\\1{,}11x_1+0{,}13x_2-0{,}75x_3=0{,}13\\0{,}17x_1-2{,}11x_2+0{,}71x_3=0{,}17\end{cases}$	6.	$\begin{cases}0{,}92x_1-0{,}83x_2+0{,}62x_3=2{,}15\\0{,}24x_1-0{,}54x_2+0{,}43x_3=0{,}62\\0{,}73x_1-0{,}81x_2-0{,}67x_3=0{,}88\end{cases}$
7.	$\begin{cases}1{,}24x_1-0{,}87x_2-3{,}17x_3=0{,}46\\2{,}11x_1-0{,}45x_2+1{,}44x_3=1{,}50\\0{,}48x_1+1{,}25x_2-0{,}63_3=0{,}35\end{cases}$	8.	$\begin{cases}0{,}64x_1-0{,}83x_2+4{,}2x_3=2{,}23\\0{,}58x_1-0{,}83x_2+1{,}43x_3=1{,}71\\0{,}86x_1+0.77x_2+0{,}88_3=-0{,}54\end{cases}$
9.	$\begin{cases}0{,}32x_1-0{,}42x_2+0{,}85x_3=1{,}32\\0{,}63x_1-1{,}43x_2-0{,}58x_3=-0{,}44\\0{,}84x_1-2{,}23x_2-0{,}52x_3=0{,}64\end{cases}$	10.	$\begin{cases}0{,}73x_1+1{,}24x_2-0{,}38x_3=0{,}58\\1{,}25x_1+0{,}66x_2-0{,}78x_3=0{,}66\\0{,}75x_1+1{,}22x_2-0{,}83x_3=0{,}92\end{cases}$
11.	$\begin{cases}0{,}62x_1-0{,}44x_2-0{,}86x_3=0{,}68\\0{,}83x_1+0{,}42x_2-0{,}56x_3=1{,}24\\0{,}58x_1-0{,}37x_2-0{,}62x_3=0{,}87\end{cases}$	12.	$\begin{cases}1{,}26x_1-2{,}34x_2+1{,}17x_3=3{,}14\\0{,}75x_1+1{,}24x_2-0{,}48x_3=-1{,}17\\3{,}44x_1-1{,}85x_2+1{,}16x_3=1{,}83\end{cases}$
13.	$\begin{cases}0{,}46x_1+1{,}72x_2+2{,}53x_3=2{,}44\\1{,}53x_1-2{,}32x_2-1{,}83x_3=2{,}83\\0{,}75x_1+0{,}76x_2+3{,}72x_3=1{,}06\end{cases}$	14.	$\begin{cases}2{,}47x_1+0{,}65_2-1{,}88x_3=1{,}24\\1{,}34x_1+1{,}17x_2+2{,}54x_3=2{,}35\\0{,}86x_1-1{,}73x_2-1{,}08x_3=3{,}15\end{cases}$
15.	$\begin{cases}4{,}24x_1+2{,}73x_2-1{,}55x_3=1{,}87\\2{,}34x_1+1{,}27x_2+3{,}15x_3=2{,}16\\3{,}05x_1-1{,}05x_2-0{,}63x_3=-1{,}25\end{cases}$	16.	$\begin{cases}0{,}43x_1+1{,}24x_2-0{,}58x_3=2{,}71\\0{,}74x_1+0{,}83x_2+1{,}17x_3=1{,}26\\1{,}43x_1-1{,}58x_2+0{,}83x_3=1{,}03\end{cases}$

2.6. Розв'язання систем лінійних рівнянь методом квадратних коренів

Метод ґрунтується на поданні матриці коефіцієнтів лінійної системи $Ax=b$, у вигляді добутку двох трикутних матриць. Це дозволяє звести розв'язання заданої системи до послідовного розв'язання двох систем з трикутними матрицями, що є простішою задачею.

Метод використовується для розв'язання систем із симетричними матрицями.

Розв'язання системи здійснюється у два етапи.

Перший етап. Подамо матрицю A у вигляді добутку двох взаємно транспонованих матриць $A = S^T S$, де

$$S = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \dots & s_{1n} \\ 0 & s_{22} & \dots & s_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}, \quad S^T = \begin{pmatrix} s_{11} & 0 & \dots & 0 \\ s_{12} & s_{22} & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ s_{1n} & s_{2n} & \dots & s_{nn} \end{pmatrix}$$

Виконуючи множення матриць S і S^T і прирівнюючи результат матриці A, для визначення елементів s_{ij} одержимо формули

$$s_{11} = \sqrt{a_{11}}, \; s_{1j} = \frac{a_{1j}}{a_{11}} \; (j > 1),$$

$$s_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki}^2} \; (1 < i \le n),$$

$$s_{ij} = \frac{a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki} s_{kj}}{s_{ii}} \; (i < j),$$

$$s_{ij} = 0 \text{ при } i>j.$$

Другий етап. Після того, як матриця S знайдена, початкову систему замінюємо еквівалентними їх системами з трикутними матрицями

$$S^T y = b, \qquad Sx = y$$

Звідси послідовно знаходимо

$$y_1 = \frac{b_1}{s_{11}}, \; y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} s_{ki} y_k}{s_{ii}} \; (i > 1),$$

$$x_n = \frac{y_n}{s_{nn}}, \; x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^{in} s_{ik} x_k}{s_{ii}} \; (i < n).$$

Зауважимо, що при дійсних a_{ij} деякі елементи s_{ij} можуть бути уявними. Метод застосовується і в цьому випадку.

При практичному застосуванні методу квадратних коренів *прямим ходом* послідовно обчислюються коефіцієнти s_{ij} і y_i (i=1, 2 ,..., n), а потім *оберненим ходом* знаходяться невідомі x_i (i=n, n-1, ..., 1).

Введемо в електронну таблицю в діапазон комірок A3:C5 матрицю A, в D3:D5 – стовпець вільних членів b (рис. 2.8).

Оскільки серед елементів s_{ij} можливі уявні, всі числа в таблиці будемо розглядати як комплексні, і використовувати спеціальні функції для роботи з комплексними числами. Якщо ці функції недоступні, встановіть і завантажте надстройку "Пакет аналізу" за допомогою команди головного меню **Сервис→Надстройки→Пакет анализа→ОК.**

В комірках A8, B8, C8, B9, C9, C10 запишемо формули для обчислення s_{ij} при n =3. В комірках D8:D10 запишемо формули для обчислення y_i.

Формули для реалізації оберненого ходу методу, за якими знаходяться значення невідомих x_3, x_2, x_1, запишемо в комірки діапазону D13:D15.

Оскільки значення невідомих є дійсними (уявна частина дорівнює нулю), за допомогою функції МНИМ.ВЕЩ() виділяємо коефіцієнти при дійсних частинах комплексних чисел.

Остаточно знайдені розв'язки системи запишемо в діапазоні комірок D18:D20.

Робота №12. Розв'язати систему рівнянь методом квадратних коренів

№	Система	№	Система
1.	$\begin{cases} 3{,}14x_1 - 2{,}12x_2 + 1{,}17x_3 = 1{,}27 \\ -2{,}12x_1 + 1{,}32x_2 - 2{,}45x_3 = 2{,}13 \\ 1{,}17x_1 - 2{,}45x_2 + 1{,}18x_3 = 3{,}14 \end{cases}$	2.	$\begin{cases} 2{,}45x_1 + 1{,}75x_2 - 3{,}24x_3 = 1{,}23 \\ 1{,}75x_1 - 1{,}16x_2 + 2{,}18x_3 = 3{,}43 \\ -3{,}24x_1 + 2{,}18x_2 - 1{,}85x_3 = -0{,}16 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} 1{,}65x_1 - 2{,}27x_2 + 0{,}18x_3 = 2{,}25 \\ -2{,}27x_1 + 1{,}73x_2 - 0{,}46x_3 = 0{,}93 \\ 0{,}18x_1 - 0{,}46x_2 + 2{,}16x_3 = 1{,}33 \end{cases}$	4.	$\begin{cases} 3{,}23x_1 + 1{,}62x_2 + 0{,}65x_3 = 1{,}28 \\ 1{,}62x_1 - 2{,}33x_2 - 1{,}43x_3 = 0{,}87 \\ 0{,}65x_1 - 1{,}43x_2 + 2{,}18x_3 = -2{,}87 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} 0{,}93x_1 + 1{,}42x_2 - 2{,}55x_3 = 2{,}48 \\ 1{,}42x_1 - 2{,}87x_2 + 2{,}36x_3 = -0{,}75 \\ -2{,}55x_1 + 2{,}36x_2 - 1{,}44x_3 = 1{,}83 \end{cases}$	6.	$\begin{cases} 1{,}42x_1 - 2{,}15x_2 + 1{,}07x_3 = 2{,}48 \\ -2{,}15x_1 + 0{,}76x_2 - 2{,}18x_3 = 1{,}15 \\ 1{,}07x_1 - 2{,}18x_2 + 1{,}23x_3 = 0{,}88 \end{cases}$
7.	$\begin{cases} 2{,}23x_1 - 0{,}71x_2 + 0{,}63x_3 = 1{,}28 \\ -0{,}71x_1 + 1{,}45x_2 - 1{,}34x_3 = 0{,}64 \\ 0{,}63x_1 - 1{,}34x_2 + 0{,}77x_3 = -0{,}87 \end{cases}$	8.	$\begin{cases} 1{,}63x_1 + 1{,}27x_2 - 0{,}84x_3 = 1{,}51 \\ 1{,}27x_1 + 0{,}65x_2 + 1{,}27x_3 = -0{,}63 \\ -0{,}84x_1 + 1{,}27x_2 - 1{,}21x_3 = 2{,}15 \end{cases}$
9.	$\begin{cases} 0{,}78x_1 + 1{,}08x_2 - 1{,}35x_3 = 0{,}57 \\ 1{,}08x_1 - 1{,}28x_2 + 0{,}37x_3 = 1{,}27 \\ -1{,}35x_1 + 0{,}37x_2 + 2{,}86x_3 = 0{,}47 \end{cases}$	10.	$\begin{cases} 0{,}83x_1 + 2{,}18x_2 - 1{,}73x_3 = 0{,}28 \\ 2{,}18x_1 - 1{,}41x_2 + 1{,}03x_3 = -1{,}18 \\ -1{,}73x_1 + 1{,}03x_2 + 2{,}27x_3 = 0{,}72 \end{cases}$
11.	$\begin{cases} 2{,}74x_1 - 1{,}18x_2 + 1{,}23x_3 = 0{,}16 \\ -1{,}18x_1 + 1{,}71x_2 - 0{,}52x_3 = 1{,}81 \\ 1{,}23x_1 - 0{,}52x_2 + 0{,}62x_3 = -1{,}25 \end{cases}$	12.	$\begin{cases} 1{,}35x_1 - 0{,}72x_2 + 1{,}38x_3 = 0{,}883 \\ -0{,}72x_1 + 1{,}45x_2 - 2{,}18x_3 = 1{,}72 \\ 1{,}38x_1 - 2{,}18x_2 + 0{,}93x_3 = -0{,}72 \end{cases}$
13.	$\begin{cases} 1{,}48x_1 + 0{,}75x_2 - 1{,}23x_3 = 0{,}83 \\ 0{,}752x_1 - 0{,}96x_2 + 1{,}64x_3 = -1{,}12 \\ -1{,}23x_1 + 1{,}64x_2 - 0{,}55x_3 = 0{,}47 \end{cases}$	14.	$\begin{cases} 2{,}16x_1 - 3{,}18x_2 + 1{,}26x_3 = 1{,}83 \\ -3{,}18x_1 + 0{,}63x_2 - 2{,}73x_3 = 0{,}54 \\ 1{,}26x_1 - 2{,}73x_2 + 3{,}15x_3 = 1{,}72 \end{cases}$
15.	$\begin{cases} 0{,}63x_1 - 1{,}72x_2 + 3{,}37x_3 = -0{,}75 \\ -1{,}72x_1 - 2{,}27x_2 + 1{,}62x_3 = 1{,}27 \\ 3{,}27x_1 + 1{,}62x_2 - 0{,}43x_3 = 2{,}74 \end{cases}$	16.	$\begin{cases} 1{,}36x_1 + 0{,}92x_2 - 1{,}87x_3 = 2{,}15 \\ 0{,}92x_1 - 2{,}24x_2 + 0{,}77x_3 = -2.06 \\ -1{,}87x_1 + 0{,}77x_2 - 1{,}16x_3 = 0{,}17 \end{cases}$

A8 | =МНИМ.КОРЕНЬ(A3)

	A	B	C	D
1	**Метод квадратного кореня**			
2	Коефіцієнти при невідомих			Вільні члени
3	4,25+0i	-1,48+0i	0,73+0i	1,44+0i
4	-1,48+0i	1,73+0i	-1,85+0i	2,73+0i
5	0,73+0i	-1,85+0i	1,93+0i	-0,64+0i
6				
7	Обчислення елементів трикутної матриці			
8	2,06155281280883	-0,717905450107546	0,354102012553046	0,698502600104639
9		1,10209426307639	-1,44795984223675	2,93210747192269
10			3,30856785094274E-017+0,540347980494412i	3,80543024641971E-016-6,21494447508259i
11				
12	Обернений хід			
13			1	-11,5017446153791-1,40851095360356E-015i
14		1		-12,4508014482404-1,85053798617512E-015i
15	1			-2,02139119392213-4,02490170213783E-016i
16				
17	Значення коренів			
18			1	-11,50174462
19		1		-12,45080145
20	1			-2,021391194

Рис. 2.8. Розв'язання СЛАР за методом квадратного кореня

2.7. Розв'язання систем лінійних рівнянь за схемою Халецького

Метод Халецького ґрунтується на факторизації матриці A системи рівнянь $Ax=b$, тобто у поданні її у вигляді добутку нижньої трикутної матриці L ($l_{ij}=0, i<j$) і верхньої трикутної матриці R з одиничною діагоналлю ($r_{ij}=0, i>j,\ r_{ii}=1$), тобто $A=LR$.

Тоді елементи матриць L і R визначаються з системи n^2 рівнянь

$$a_{ij}=\sum_{k=1}^{n} l_{ik}r_{kj},\ i,j=\overline{1,n}$$

Специфічний вигляд матриць L і R дозволяє розв'язок цієї системи записати у явному вигляді

$$l_{i1}=a_{i1},$$

$$l_{ij}=a_{ij}-\sum_{k=1}^{j-1} l_{ik}r_{kj}\ (i\ge j>1)$$

і

$$r_{1j}=\frac{a_{1j}}{l_{11}}$$

$$r_{ij}=\frac{1}{l_{ii}}\left(a_{ij}-\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}r_{kj}\right),\ i<j$$

Після визначення матриць L і R розв'язок системи зводиться до знаходження розв'язку двох систем рівнянь $Ly=b$, $Rx=y$. Так як матриці L і R – трикутні, ці системи легко розв'язуються, а саме:

$$y_i=\frac{b_1}{l_{11}},$$

$$y_i=\frac{1}{l_{ii}}\left(b_i-\sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}y_k\right),\ (i>1)$$

і

$$x_n=y_n$$

$$x_i=y_i-\sum_{k=i+1}^{n} l_{ik}x_k,\ (i<n)$$

З цих формул видно, що числа y_i зручно обчислювати разом з коефіцієнтами l_{ij}. Ця схема обчислень називається схемою Халецького.

Застосуємо її до розв'язання наступного прикладу (рис. 2.9).

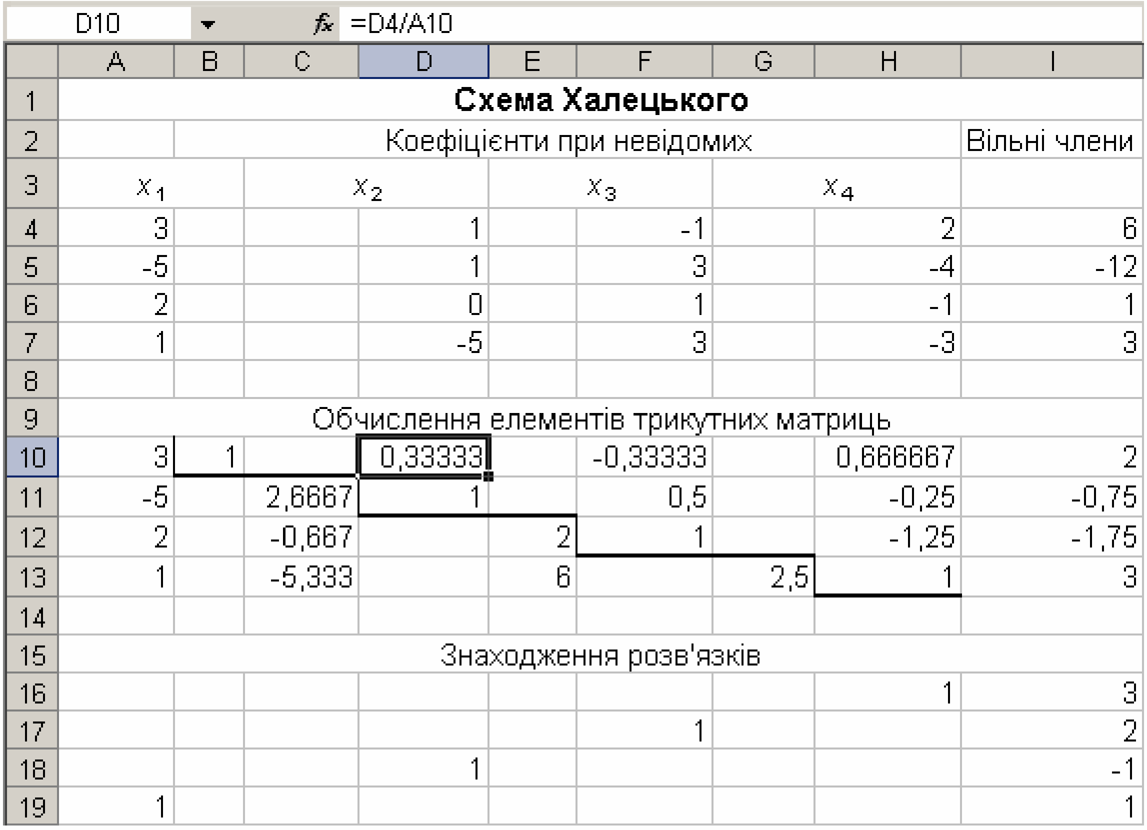
Введемо в електронну таблицю в комірки A4:A7; D4:D7; F4:F7; H4:H7 матрицю A, в I4:I7 – стовпець вільних членів b.

Оскільки діагональні елементи матриці R дорівнюють одиниці, заповнимо комірки B10, D11, F12, H13 числом 1.

Так як $l_{i1}=a_{i1}\ (i=1,2,3,4)$, то елементи стовпця x_1 з першого розділу таблиці (діапазон комірок A4:A7) переносимо в стовпець x_1 другого розділу (діапазон комірок A10:A13).

Щоб отримати перший рядок другого розділу ділимо всі елементи першого рядка першого розділу (комірки D10, F10, H10, I10) на елемент l_{11} (комірка A10), у нашому випадку на 3.

Переходимо до заповнення стовпця x_2 з другого розділу, починаючи з другого рядка. Застосовуємо формули для обчислення $l_{j2}\ (j=2,3,4)$ в комірках C11:C13.


D10 =D4/A10

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Схема Халецького								
2		Коефіцієнти при невідомих							Вільні члени
3	x_1		x_2		x_3		x_4		
4	3			1		-1		2	6
5	-5			1		3		-4	-12
6	2			0		1		-1	1
7	1			-5		3		-3	3
8									
9	Обчислення елементів трикутних матриць								
10	3	1		0,33333		-0,33333		0,666667	2
11	-5		2,6667	1		0,5		-0,25	-0,75
12	2		-0,667		2	1		-1,25	-1,75
13	1		-5,333		6		2,5	1	3
14									
15	Знаходження розв'язків								
16								1	3
17						1			2
18				1					-1
19	1								1

Рис. 2.9. Розв'язання СЛАР за схемою Халецького

Далі визначаючи $r_{2j}\ (j=3,4)$, y_2 заповнюємо другий рядок другого розділу (комірки F11, H11, I11).

Потім переходимо до стовпця x_3, обчислюючи його елементи l_{33}, l_{43} (комірки E12:E13).

Аналогічно продовжуємо процес, поки не буде заповнена вся таблиця другого розділу.

Таким чином, заповнення другого розділу здійснюється способом “ялинки”: стовпець – рядок, стовпець – рядок і т.д.

В третьому розділі в комірках I16:I19 обчислюємо значення невідомих x_4, x_3, x_2, x_1.

Всі формули, використані в таблиці, відображені на рис. 2.10.

C19 | f_x

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Схема Халецького**								
2		Коефіцієнти при невідомих							Вільні члени
3	x1		x2		x3		x4		
4	3			1		-1		2	6
5	-5			1		3		-4	-12
6	2			0		1		-1	1
7	1			-5		3		-3	3
8									
9	Обчислення елементів трикутних матриць								
10	=A4	1		=D4/A1		=F4/A10		=H4/A10	=I4/A10
11	=A5		=D5-A11*D$10	1		=(F5-A11*F10)/C1		=(H5-A11*H10)/C11	=(I5-A11*I10)/C11
12	=A6		=D6-A12*D$10		=F6-A12*F10-C12*F1	1		=(H6-A12*H10-C12*H11)/E12	=(I6-A12*I10-C12*I11)/E12
13	=A7		=D7-A13*D$10		=F7-A13*F10-C13*F1		=H7-A13*H10-C13*H11-E13*H12	1	=(I7-A13*I10-C13*I11-E13*I12)/G13
14									
15	Знаходження розв'язків								
16								1	=I13
17						1			=I12-H12*I16
18				1					=I11-F11*I17-H11*I16
19	1								=I10-D10*I18-F10*I17-H10*I16

Рис. 2.10. Формули для обчислень за схемою Халецького

Робота №13. Розв’язати систему рівнянь за схемою Халецького

№	Система	№	Система
1.	$\begin{cases} 0{,}63x_1 + 1{,}00x_2 + 0{,}71x_3 + 0{,}34x_4 = 2{,}08 \\ 1{,}17x_1 + 0{,}18x_2 - 0{,}65x_3 + 0{,}71x_4 = 0{,}17 \\ 2{,}71x_1 - 0{,}75x_2 + 1{,}17x_3 - 2{,}35x_4 = 1{,}28 \\ 3{,}58x_1 + 0{,}21x_2 - 3{,}45x_3 - 1{,}18x_4 = 0{,}05 \end{cases}$	2.	$\begin{cases} 3{,}51x_1 + 0{,}17x_2 + 3{,}75x_3 - 0{,}28x_4 = 0{,}75 \\ 4{,}52x_1 + 2{,}11x_2 - 0{,}11x_3 - 0{,}12x_4 = 1{,}11 \\ -2{,}11x_1 + 3{,}17x_2 + 0{,}12x_3 - 0{,}15x_4 = 0{,}21 \\ 3{,}17x_1 + 1{,}81x_2 - 3{,}17x_3 + 0{,}22x_4 = 0{,}05 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} 0{,}17x_1 + 0{,}75x_2 - 0{,}18x_3 + 0{,}21x_4 = 0{,}11 \\ 0{,}75x_1 + 0{,}13x_2 + 0{,}11x_3 + 1{,}00x_4 = 2{,}00 \\ -0{,}33x_1 + 0{,}11x_2 + 3{,}01x_3 - 2{,}01x_4 = 0{,}11 \\ 0{,}11x_1 + 1{,}12x_2 + 1{,}11x_3 - 1{,}31x_4 = 0{,}13 \end{cases}$	4.	$\begin{cases} -1{,}00x_1 + 0{,}13x_2 - 2{,}00x_3 - 0{,}14x_4 = 0{,}15 \\ 0{,}75x_1 + 0{,}18x_2 - 0{,}21x_3 - 0{,}77x_4 = 0{,}11 \\ 0{,}28x_1 - 0{,}17x_2 + 0{,}39x_3 + 0{,}48x_4 = 0{,}12 \\ 1{,}00x_1 + 3{,}14x_2 - 0{,}21x_3 - 1{,}00x_4 = -0{,}11 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} 3{,}01x_1 - 0{,}14x_2 + 1{,}00x_3 - 0{,}15x_4 = 1{,}00 \\ -1{,}75x_1 + 1{,}11x_2 + 0{,}13x_3 - 0{,}75x_4 = 0{,}13 \\ 0{,}17x_1 - 2{,}11x_2 + 0{,}71x_3 - 1{,}71x_4 = 1{,}00 \\ 0{,}21x_1 + 0{,}21x_2 + 0{,}35x_3 + 0{,}33x_4 = 0{,}17 \end{cases}$	6.	$\begin{cases} 1{,}15x_1 + 0{,}62x_2 - 0{,}83x_3 + 0{,}92x_4 = 2{,}15 \\ 0{,}82x_1 - 0{,}54x_2 + 0{,}43x_3 - 0{,}25x_4 = 0{,}62 \\ 0{,}24x_1 + 1{,}15x_2 - 0{,}33x_3 + 1{,}42x_4 = -0{,}62 \\ 0{,}73x_1 - 0{,}81x_2 + 1{,}27x_3 - 0{,}67x_4 = 0{,}88 \end{cases}$
7.	$\begin{cases} 1{,}00x_1 - 0{,}17x_2 + 0{,}11x_3 - 0{,}15x_4 = 0{,}17 \\ 0{,}14x_1 + 0{,}21x_2 - 0{,}33x_3 + 0{,}11x_4 = 1{,}00 \\ 0{,}22x_1 + 3{,}44x_2 - 0{,}11x_3 + 0{,}12x_4 = 2{,}00 \\ 0{,}11x_1 + 0{,}13x_2 + 0{,}12x_3 + 0{,}14x_4 = 0{,}13 \end{cases}$	8.	$\begin{cases} 0{,}64x_1 + 0{,}72x_2 - 0{,}83x_3 + 4{,}2x_4 = 2{,}23 \\ 0{,}58x_1 - 0{,}83x_2 + 1{,}43x_3 - 0{,}62x_4 = 1{,}71 \\ 0{,}86x_1 + 0{,}77x_2 - 1{,}83x_3 + 0{,}88x_4 = -0{,}54 \\ 1{,}32x_1 - 0{,}52x_2 - 0{,}65x_3 + 1{,}22x_4 = 0{,}65 \end{cases}$
9.	$\begin{cases} 1{,}42x_1 + 0{,}32x_2 - 0{,}42x_3 + 0{,}85x_4 = 1{,}32 \\ 0{,}63x_1 - 0{,}43x_2 + 1{,}27x_3 - 0{,}58x_4 = -0{,}44 \\ 0{,}84x_1 - 2{,}23x_2 - 0{,}52x_3 + 0{,}47x_4 = 0{,}64 \\ 0{,}27x_1 + 1{,}37x_2 + 0{,}64x_3 - 1{,}27x_4 = 0{,}85 \end{cases}$	10.	$\begin{cases} 0{,}73x_1 + 1{,}24x_2 - 0{,}38x_3 - 1{,}43x_4 = 0{,}58 \\ 1{,}07x_1 - 0{,}77x_2 + 1{,}25x_3 + 0{,}66x_4 = -0{,}66 \\ 1{,}56x_1 + 0{,}66x_2 + 1{,}44x_3 + -0{,}87x_4 = 1{,}24 \\ 0{,}75x_1 + 1{,}22x_2 - 0.83x_3 + 0{,}37x_4 = 0{,}92 \end{cases}$
11.	$\begin{cases} 1{,}32x_1 - 0{,}83x_2 - 0{,}44x_3 + 0{,}62x_4 = 0{,}68 \\ 0{,}83x_1 + 0{,}42x_2 - 0{,}56x_3 + 0{,}77x_4 = 1{,}24 \\ 0{,}58x_1 - 0{,}37x_2 + 1{,}24x_3 - 0{,}62x_4 = 0{,}87 \\ 0{,}35x_1 + 0{,}66x_2 - 1{,}38x_3 - 0{,}93x_4 = -1{,}08 \end{cases}$	12.	$\begin{cases} 0{,}11x_1 - 0{,}17x_2 + 0{,}72x_3 - 0{,}34x_4 = 0{,}17 \\ 0{,}81x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}91x_3 + 0{,}17x_4 = 1{,}00 \\ 0{,}17x_1 - 0{,}18x_2 + 1{,}00x_3 + 0{,}23x_4 = 0{,}21 \\ 0{,}13x_1 + 0{,}17x_2 - 0{,}99x_3 + 0{,}35x_4 = 2{,}71 \end{cases}$
13.	$\begin{cases} 0{,}18x_1 + 2{,}11x_2 + 0{,}13x_3 - 0{,}22x_4 = 0{,}22 \\ 0{,}33x_1 - 0{,}22x_2 - 1{,}00x_3 + 0{,}17x_4 = 0{,}11 \\ -1{,}00x_1 + 0{,}11x_2 + 2{,}00x_3 - 0{,}45x_4 = 1{,}00 \\ 7{,}00x_1 - 0{,}17x_2 - 0{,}22x_3 + 0{,}33x_4 = 0{,}21 \end{cases}$	14.	$\begin{cases} 2{,}00x_1 + 0{,}05x_2 - 3{,}01x_3 - 0{,}11x_4 = 0{,}21 \\ 1{,}00x_1 - 2{,}00x_2 + 3{,}02x_3 + 0{,}05x_4 = 0{,}18 \\ 0{,}17x_1 + 0{,}99x_2 - 2{,}00x_3 - 0{,}17x_4 = 0{,}17 \\ 0{,}33x_1 - 0{,}07x_2 + 0{,}33x_3 + 2{,}00x_4 = -0{,}17 \end{cases}$
15.	$\begin{cases} 0{,}17x_1 - 0{,}13x_2 - 0{,}11x_3 - 0{,}12x_4 = 0{,}22 \\ 1{,}00x_1 - 1{,}00x_2 - 0{,}13x_3 + 0{,}13x_4 = 0{,}11 \\ 0{,}35x_1 + 0{,}33x_2 + 0{,}12x_3 + 0{,}13x_4 = 0{,}12 \\ 0{,}13x_1 + 0{,}11x_2 - 0{,}13x_3 - 0{,}11x_4 = 1{,}00 \end{cases}$	16.	$\begin{cases} 0{,}11x_1 + 1{,}13x_2 - 0{,}17x_3 + 0{,}18x_4 = 1{,}00 \\ 0{,}13x_1 - 1{,}17x_2 + 0{,}18x_3 + 0{,}14x_4 = 0{,}13 \\ 0{,}11x_1 - 1{,}05x_2 - 0{,}17x_3 - 0{,}15x_4 = 0{,}11 \\ 0{,}15x_1 - 0{,}05x_2 + 0{,}18x_3 - 0{,}11x_4 = 1{,}00 \end{cases}$

2.8. Розв'язання систем лінійних рівнянь методом ітерацій

Зведемо систему лінійних алгебраїчних рівнянь до вигляду $x=Ax+b$. Виходячи з довільного вектору $x^{(0)}$, за який можна взяти, наприклад, стовпець вільних членів $x^{(0)}=b$, будуємо ітераційний процес

$$x^{(k+1)} = Ax^{(k)} + b \; (k = 1,2,\ldots)$$

або в розгорнутому вигляді

$$x_i^{(0)} = b_i,$$

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i$$

$$(i = 1,\ldots,n;\; k = 0,1,2,\ldots)$$

Дана схема реалізує метод послідовних наближень або метод ітерацій.

Здійснюючи ітерації, отримуємо послідовність векторів $x^{(1)}, x^{(2)},\ldots, x^{(k)},\ldots$

Для успішного застосування методу ітерацій елементи матриці A повинні бути малі за модулем. Процес ітерацій завершують, якщо виконуються відповідні оцінки похибки наближеного розв'язку.

Введемо в електронну таблицю в комірки B3:E6 матрицю A, в F3:F6 – стовпець вільних членів b (рис. 2.11).

B11 fx =F3

	A	B	C	D	E	F
1	**Метод ітерацій розв'язку системи x=Ax+b**					
2		Коефіцієнти матриці A				Вільні члени
3		0,32	-0,05	0,11	-0,08	2,15
4		0,11	0,16	-0,28	-0,06	-0,83
5		0,08	-0,15	0	0,12	1,16
6		-0,21	0,13	-0,27	0	0,44
7						
8		Ітерації				
9						
10	k	x_1	x_2	x_3	x_4	
11	0	2,1500	-0,8300	1,1600	0,4400	
12	1	2,9719	-1,0775	1,5093	-0,4326	
13	2	3,3555	-1,0721	1,5075	-0,7317	
14	3	3,5017	-1,0106	1,5015	-0,8111	
15	4	3,5511	-0,9783	1,4944	-0,8321	
16	5	3,5662	-0,9644	1,4910	-0,8364	
17	6	3,5703	-0,9593	1,4896	-0,8368	
18	7	3,5713	-0,9576	1,4891	-0,8367	
19	8	3,5714	-0,9571	1,4889	-0,8365	
20	9	3,5714	-0,9570	1,4889	-0,8364	
21	10	3,5714	-0,9570	1,4889	-0,8364	

Рис. 2.11. Розв'язання СЛАР методом ітерацій

Умови збіжності $\sum_{j=1}^{n}\left|a_{ij}\right| \le \alpha < 1\ (i = 1,2,\cdots,n)$ для даної системи виконані.

За початковий вектор $x^{(0)}$ візьмемо стовпець вільних членів. Розташуємо початкові наближення в комірках діапазону B11:D11. Введемо в комірки діапазону B12:D12 формули, що визначають перше наближення розв'язків $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}$:

=B$3*B11+C$3*C11+D$3*D11+E$3*E11+F$3
=B$4*B11+C$4*C11+D$4*D11+E$4*E11+F$4
=B$5*B11+C$5*C11+D$5*D11+E$5*E11+F$5,
=B$6*B11+C$6*C11+D$6*D11+E$6*E11+F$6

відповідно. Далі використовуючи механізм автозаповнення копіюємо першу формулу в діапазон комірок B11:B20, другу – в C11:C20, третю – в D11:D20. Обчислення проводимо до тих пір, поки величини $\left|x_i^{(k+1)} - x_i^{(k)}\right|$ не стануть меншими ε=10^{-4}.

Робота №14. Методом ітерацій розв'язати систему лінійних рівнянь

№	Система	№	Система
1.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}23x_1 - 0{,}04x_2 + 0{,}21x_3 - 0{,}18x_4 + 1{,}24 \\ x_2 = 0{,}45x_1 - 0{,}23x_2 + 0{,}06x_3 - 0{,}88 \\ x_3 = 0{,}26x_1 + 0{,}34x_2 - 0{,}11x_3 + 0{,}62 \\ x_4 = 0{,}05x_1 - 0{,}26x_2 + 0{,}34x_3 - 0.12x_4 - 1{,}17 \end{cases}$	2.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}21x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}34x_3 - 0{,}16x_4 - 0{,}64 \\ x_2 = 0{,}34x_1 - 0{,}08x_2 + 0{,}17x_3 - 0{,}18x_4 + 1{,}42 \\ x_3 = 0{,}16x_1 + 0{,}34x_2 + 0{,}15x_3 - 0{,}31x_4 - 0{,}42 \\ x_4 = 0{,}12x_1 - 0{,}26x_2 - 0{,}08x_3 + 0{,}25x_4 + 0{,}83 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}32x_1 - 0{,}18x_2 + 0{,}02x_3 + 0{,}21x_4 + 1{,}83 \\ x_2 = 0{,}16x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}14x_3 + 0{,}27x_4 - 0{,}65 \\ x_3 = 0{,}37x_1 + 0{,}27x_2 - 0{,}02x_3 - 0{,}24x_4 + 2{,}23 \\ x_4 = 0{,}12x_1 + 0{,}21x_2 - 0{,}18x_3 + 0{,}25x_4 - 1{,}13 \end{cases}$	4.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}42x_1 - 0{,}52x_2 + 0{,}03x_3 + 0{,}44 \\ x_2 = 0{,}31x_1 - 0{,}26x_2 - 0{,}36x_3 + 1{,}42 \\ x_3 = 0{,}12x_1 + 0{,}08x_2 - 0{,}14x_3 - 0{,}24x_4 - 0{,}83 \\ x_4 = 0{,}15x_1 - 0{,}35x_2 - 0{,}18x_3 - 1{,}42 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}18x_1 - 0{,}34x_2 - 0{,}12x_3 + 0{,}15x_4 - 1{,}33 \\ x_2 = 0{,}11x_1 + 0{,}23x_2 - 0{,}45x_3 + 0{,}32x_4 + 0{,}84 \\ x_3 = 0{,}05x_1 - 0{,}12x_2 + 0{,}14x_3 - 0{,}18x_4 - 1{,}16 \\ x_4 = 0{,}12x_1 + 0{,}08x_2 + 0{,}06x_3 + 0{,}57 \end{cases}$	6.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}13x_1 + 0{,}23x_2 - 0{,}44x_3 - 0{,}05x_4 + 2{,}13 \\ x_2 = 0{,}24x_1 - 0{,}31x_3 + 0{,}15x_4 - 0{,}18 \\ x_3 = 0{,}06x_1 + 0{,}15x_2 - 0{,}23x_4 + 1{,}44 \\ x_4 = 0{,}72x_1 - 0.08x_2 - 0{,}05x_3 + 2{,}42 \end{cases}$
7.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}17x_1 + 0{,}31x_2 - 0{,}18x_3 + 0{,}22x_4 - 1{,}71 \\ x_2 = -0{,}21x_1 + 0{,}33x_3 + 0{,}22x_4 + 0{,}62 \\ x_3 = 0{,}32x_1 - 0{,}18x_2 + 0{,}05x_3 - 0{,}19x_4 - 0{,}89 \\ x_4 = 0{,}12x_1 + 0{,}28x_2 - 0{,}14x_3 + 0{,}93 \end{cases}$	8.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}13x_1 + 0{,}27x_2 - 0{,}22x_3 - 0{,}18x_4 + 1{,}21 \\ x_2 = -0{,}21x_1 - 0{,}45x_3 + 0{,}18x_4 - 0{,}33 \\ x_3 = 0{,}12x_1 + 0{,}13x_2 - 0{,}33x_3 + 0{,}18x_4 - 0{,}48 \\ x_4 = 0{,}33x_1 - 0{,}05x_2 + 0{,}06x_3 - 0{,}28x_4 - 0{,}17 \end{cases}$
9.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}19x_1 - 0{,}07x_2 + 0{,}38x_3 - 0{,}21x_4 - 0{,}81 \\ x_2 = -0{,}22x_1 + 0{,}08x_2 + 0{,}11x_3 + 0{,}33x_4 - 0{,}64 \\ x_3 = 0{,}51x_1 - 0{,}07x_2 + 0{,}00x_3 - 0{,}11x_4 + 1{,}71 \\ x_4 = 0{,}33x_1 - 0{,}41x_2 - 1{,}21 \end{cases}$	10.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}22x_2 - 0{,}11x_3 + 0{,}31x_4 + 2{,}7 \\ x_2 = 0{,}38x_1 - 0{,}12x_3 + 0{,}22x_4 - 1{,}5 \\ x_3 = 0{,}11x_1 + 0{,}23x_2 - 0{,}51x_4 + 1{,}2 \\ x_4 = 0{,}17x_1 - 0{,}21x_2 + 0{,}31x_3 - 0{,}17 \end{cases}$

№	Система	№	Система
11.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}07x_1 - 0{,}08x_2 + 0{,}11x_3 - 0{,}18x_4 - 0{,}51 \\ x_2 = 0{,}18x_1 + 0{,}52x_2 + 0{,}21x_4 + 1{,}17 \\ x_3 = 0{,}13x_1 + 0{,}31_2 - 0{,}21x_4 - 1{,}02 \\ x_4 = 0{,}08x_1 - 0{,}33x_3 + 0{,}28x_4 - 0{,}28 \end{cases}$	12.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}05x_1 - 0{,}06x_2 - 0{,}12x_3 + 0{,}14x_4 - 2{,}17 \\ x_2 = 0{,}04x_1 - 0{,}12x_2 + 0{,}68x_3 + 0{,}11x_4 + 1{,}4 \\ x_3 = 0{,}34x_1 + 0{,}08x_2 - 0{,}06x_3 + 0{,}44x_4 - 2{,}1 \\ x_4 = 0{,}11x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}03x_4 - 0{,}8 \end{cases}$
13.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}08x_1 - 0{,}03x_2 - 0{,}04x_4 - 1{,}2 \\ x_2 = 0{,}51x_2 + 0{,}27x_3 - 0{,}08x_4 + 0{,}81 \\ x_3 = 0{,}33x_1 - 0{,}37x_3 + 0{,}21x_4 - 0{,}92 \\ x_4 = 0{,}11x_1 + 0{,}03x_3 + 0{,}58x_4 + 0{,}17 \end{cases}$	14.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}12x_1 - 0{,}23x_2 + 0{,}25x_3 - 0{,}16x_4 + 1{,}24 \\ x_2 = 0{,}14x_1 + 0{,}34x_2 - 0{,}18x_3 + 0{,}24x_4 - 0{,}89 \\ x_3 = 0{,}33x_1 + 0{,}03x_2 + 0{,}46x_3 - 0{,}32x_4 + 1{,}15 \\ x_4 = 0{,}12x_1 - 0{,}05x_2 + 0{,}15x_4 - 0{,}57 \end{cases}$
15.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}23x_1 - 0{,}14x_2 + 0{,}06x_3 - 0{,}12x_4 + 1{,}21 \\ x_2 = 0{,}12x_1 + 0{,}32x_3 - 0{,}18x_4 - 0{,}72 \\ x_3 = 0{,}08x_1 - 0{,}12x_2 + 0{,}23x_3 + 0{,}32x_4 - 0{,}58 \\ x_4 = 0{,}25x_1 + 0{,}22x_2 + 0{,}14x_3 + 1{,}56 \end{cases}$	16.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}14x_1 + 0{,}23x_2 + 0{,}18x_3 + 0{,}17x_4 - 1{,}42 \\ x_2 = 0{,}12x_1 - 0{,}14x_2 + 0{,}08x_3 + 0{,}09x_4 - 0{,}83 \\ x_3 = 0{,}16x_1 + 0{,}24x_2 - 0{,}35x_4 + 1{,}21 \\ x_4 = 0{,}23x_1 - 0{,}08x_2 + 0{,}55x_3 + 0{,}25x_4 + 0{,}65 \end{cases}$

2.9. Розв’язання систем лінійних рівнянь методом Зейделя

Метод Зейделя є деякою модифікацією методу ітерацій. Він полягає в тому, що при обчисленні (k+1)-го наближення невідомого x_i при i>1 використовуються вже обчислені раніше (k+1)-і наближення невідомих x_1, x_2, ..., x_{i-1}. Таким чином, для системи рівнянь $x=Ax+b$ обчислення ведуться за формулами

$$x_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} + \sum_{j=i}^{n} a_{ij} x_j^{(k)} + b_i$$
$$(i = 1,\ldots,n;\ k = 0,1,2,\ldots)$$

Якщо подати матрицю А у вигляді суми двох матриць $A = A^- + A^+$, де A^- та A^+ – ліва та права трикутна відповідно, тобто

$$A^- = \left(a_{ij}^-\right),\ a_{ij}^- = \begin{cases} a_{ij}, i > j \\ 0,\ \ i \le j \end{cases},$$

$$A^+ = \left(a_{ij}^+\right),\ a_{ij}^+ = \begin{cases} 0,\ \ i > j \\ a_{ij,}\ i \le j \end{cases},$$

то тоді ітераційний процес Зейделя можна записати у матричному вигляді

$$x^{(k+1)} = A^- x^{(k+1)} + A^+ x^{(k)} + b\,.$$

Як правило, метод Зейделя дає кращу збіжність, ніж метод простої ітерації. Крім того, при його застосуванні при обчисленні $x_i^{(k+1)}$ не має необхідності зберігати значення $x_1^{(k)}$, ..., $x_{i-1}^{(k)}$.

Похибки заокруглення в методі Зейделя, як і в методі ітерацій, виявляються значно меншими, ніж у методі Гаусса. Крім того, ітераційні методи мають властивість самовиправлення, коли окрема помилка в обчисленнях не відображається на остаточному результаті, так як помилкове наближення може розглядатися як новий початковий вектор.

Розв'яжемо методом Зейделя систему, матриця A якої введена в комірки діапазону B3:D5, стовпець вільних членів b – в E3:E5 електронної таблиці (рис. 2.12). За початковий вектор $x^{(0)}$ візьмемо стовпець вільних членів. Розташуємо початкові наближення в комірках діапазону B10:D10. Введемо в комірки діапазону B11:D11 формули, що визначають перше наближення розв'язків:

```
=B$3*B10+C$3*C10+D$3*D10+E$3
=B$4*B11+C$4*C10+D$4*D10+E$4,
=B$5*B11+C$5*C11+D$5*D10+E$5
```

відповідно. Далі використовуючи механізм автозаповнення копіюємо першу формулу в діапазон комірок B11:B20, другу – в C11:C20, третю – в D11: D 20. Обчислення проводимо з точністю до 10^{-4}.

B10 fx =E3

	A	B	C	D	E
1	**Метод Зейделя розв'язку системи x=Ax+b**				
2		Коефіцієнти матриці A			Вільні члени
3		0,24	-0,05	-0,24	0,19
4		-0,22	0,09	-0,44	0,97
5		0,13	-0,02	0,42	-0,14
6					
7		Ітерації			
8					
9	*k*	x_1	x_2	x_3	
10	0	0,1900	0,9700	-0,1400	
11	1	0,2207	1,0703	-0,1915	
12	2	0,2354	1,0988	-0,2118	
13	3	0,2424	1,1088	-0,2196	
14	4	0,2454	1,1124	-0,2226	
15	5	0,2467	1,1138	-0,2237	
16	6	0,2472	1,1143	-0,2241	
17	7	0,2474	1,1145	-0,2242	
18	8	0,2475	1,1145	-0,2243	
19	9	0,2475	1,1146	-0,2243	
20	10	0,2475	1,1146	-0,2243	

Рис. 2.12. Розв'язання СЛАР методом Зейделя

Робота №15. Методом Зейделя розв’язати систему лінійних рівнянь

№	Система
1.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}24x_1 + 0{,}21x_2 + 0{,}06x_3 - 0{,}34x_4 + 1{,}42 \\ x_2 = 0{,}05x_1 + 0{,}32x_2 + 0{,}12x_4 - 0{,}57 \\ x_3 = 0{,}356x_1 - 0{,}27x_2 - 0{,}05x_4 + 0{,}68 \\ x_4 = 0{,}12x_1 - 0{,}43x_2 + 0{,}34x_3 - 0{,}21x_4 - 2{,}14 \end{cases}$
2.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}17x_1 + 0{,}27x_2 - 0{,}13x_3 - 0{,}11x_4 - 1{,}42 \\ x_2 = 0{,}13x_1 - 0{,}12x_2 + 0{,}09x_3 - 0{,}{-6}x_4 + 0{,}48 \\ x_3 = 0{,}11x_1 + 0{,}05x_2 - 0{,}02x_3 + 0{,}12x_4 - 2{,}34 \\ x_4 = 0{,}13x_1 + 0{,}18x_2 + 0{,}24x_3 + 0{,}43x_4 + 0{,}72 \end{cases}$
3.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}15x_1 + 0{,}05x_2 - 0{,}08x_3 + 0{,}14x_4 - 0{,}48 \\ x_2 = 0{,}32x_1 - 0{,}43x_2 - 0{,}12x_3 + 0{,}11x_4 + 1{,}24 \\ x_3 = 0{,}17x_1 + 0{,}06x_2 - 0{,}08x_3 + 0{,}12x_4 + 1{,}15 \\ x_4 = 0{,}21x_1 - 0{,}16x_2 + 0{,}36x_3 - 0{,}88 \end{cases}$
4.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}28x_1 - 0{,}17x_3 + 0{,}06x_4 + 0{,}21 \\ x_2 = 0{,}52x_1 + 0{,}12x_3 + 0{,}17x_4 - 1{,}17 \\ x_3 = 0{,}17x_1 - 0{,}18x_2 + 0{,}21x_3 - 0{,}81 \\ x_4 = 0{,}11x_1 + 0{,}22x_2 + 0{,}03x_3 + 0{,}05x_4 + 0{,}72 \end{cases}$
5.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}52x_2 + 0{,}08x_3 + 0{,}13x_4 - 0{,}22 \\ x_2 = 0{,}07x_1 - 0{,}38x_2 - 0{,}05x_3 + 0{,}41x_4 + 1{,}8 \\ x_3 = 0{,}04x_1 + 0{,}42x_2 + 0{,}11x_3 - 0{,}07x_4 - 1{,}3 \\ x_4 = 0{,}17x_1 + 0{,}18x_2 - 0{,}13x_3 + 0{,}19x_4 + 0{,}33 \end{cases}$
6.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}01x_1 + 0{,}02x_2 - 0{,}62x_3 + 0{,}08x_4 - 1{,}3 \\ x_2 = 0{,}03x_1 + 0{,}28x_2 + 0{,}33x_3 - 0{,}07x_4 + 1{,}1 \\ x_3 = 0{,}09x_1 + 0{,}13x_2 + 0{,}42x_3 + 0{,}28x_4 - 1{,}7 \\ x_4 = 0{,}19x_1 - 0{,}23x_2 + 0{,}08x_3 + 0{,}37x_4 + 1{,}5 \end{cases}$
7.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}17x_2 - 0{,}33x_3 + 0{,}18x_4 - 1{,}2 \\ x_2 = 0{,}18x_2 + 0{,}43x_3 - 0{,}08x_4 + 0{,}33 \\ x_3 = 0{,}22x_1 + 0{,}18x_2 + 0{,}21x_3 + 0{,}07x_4 + 0{,}48 \\ x_4 = 0{,}08x_1 + 0{,}07x_2 + 0{,}71x_3 + 0{,}04x_4 - 1{,}2 \end{cases}$
8.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}03x_1 - 0{,}05x_2 + 0{,}22x_3 - 0{,}33x_4 + 0{,}43 \\ x_2 = 0{,}22x_1 + 0{,}55x_2 - 0{,}88x_3 + 0{,}07x_4 - 1{,}8 \\ x_3 = 0{,}33x_1 + 0{,}13x_2 - 0{,}08x_3 - 0{,}05x_4 - 0{,}8 \\ x_4 = 0{,}08x_1 + 0{,}17x_2 + 0{,}29x_3 + 0{,}33x_4 + 1{,}7 \end{cases}$

№	Система
9.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}13x_1 + 0{,}22x_2 - 0{,}33x_3 + 0{,}07x_4 + 0{,}11 \\ x_2 = 0{,}45x_2 - 0{,}23x_3 + 0{,}07x_4 - 0{,}33 \\ x_3 = 0{,}11x_1 - 0{,}08x_3 + 0{,}78x_4 + 0{,}85 \\ x_4 = 0{,}08x_1 + 0{,}09x_2 + 0{,}33x_3 + 0{,}21x_4 - 1{,}7 \end{cases}$
10.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}32x_1 - 0{,}16x_2 - 0{,}08x_3 + 0{,}15x_4 + 2{,}42 \\ x_2 = 0{,}16x_1 - 0{,}23x_2 + 0{,}1x_3 - 0{,}21x_4 + 1{,}43 \\ x_3 = 0{,}05x_1 - 0{,}08x_2 + 0{,}34x_4 - 0{,}16 \\ x_4 = 0{,}12x_1 + 0{,}14x_2 - 0{,}18x_3 + 0{,}06x_4 + 1{,}62 \end{cases}$
11.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}08x_1 - 0{,}23x_2 + 0{,}32x_4 + 1{,}34 \\ x_2 = 0{,}16x_1 - 0{,}23x_2 + 0{,}18x_3 + 0{,}16x_4 - 2{,}33 \\ x_3 = 0{,}15x_1 + 0{,}12x_2 + 0{,}32x_3 - 0{,}18x_4 + 0{,}34 \\ x_4 = 0{,}25x_1 + 0{,}21x_2 - 0{,}16x_3 + 0{,}03x_4 + 0{,}63 \end{cases}$
12.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}06x_1 + 0{,}182x_2 + 0{,}33x_3 + 0{,}16x_4 + 2{,}43 \\ x_2 = 0{,}32x_1 + 0{,}23x_2 - 0{,}35x_4 - 1{,}12 \\ x_3 = 0{,}16x_1 - 0{,}08x_2 - 0{,}12x_4 + 0{,}43 \\ x_4 = 0{,}09x_1 + 0{,}22x_2 - 0{,}13x_3 + 0{,}83 \end{cases}$
13.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}34x_2 + 0{,}23x_3 - 0{,}06x_4 + 1{,}42 \\ x_2 = 0{,}11x_1 - 0{,}23x_2 - 0{,}18x_3 + 0{,}36x_4 - 0{,}66 \\ x_3 = 0{,}23x_1 - 0{,}12x_2 + 0{,}16x_3 - 0{,}35x_4 + 1{,}08 \\ x_4 = 0{,}12x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}47x_3 + 0{,}18x_4 + 1{,}72 \end{cases}$
14.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}32x_1 - 0{,}23x_2 + 0{,}41x_3 - 0{,}06x_4 + 0{,}67 \\ x_2 = 0{,}18x_1 + 0{,}12x_2 - 0{,}33x_3 - 0{,}88 \\ x_3 = 0{,}12x_1 + 0{,}32x_2 - 0{,}05x_3 + 0{,}67x_4 - 0{,}18 \\ x_4 = 0{,}05x_1 - 0{,}11x_2 + 0{,}09x_3 - 0{,}12x_4 + 1{,}44 \end{cases}$
15.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}05x_1 - 0{,}15x_2 + 0{,}25x_3 - 0{,}12x_4 + 0{,}15 \\ x_2 = 0{,}34x_1 + 0{,}06x_2 - 0{,}14x_3 - 0{,}22x_4 - 0{,}08 \\ x_3 = 0{,}18x_1 - 0{,}26x_2 - 0{,}04x_3 + 0{,}32x_4 + 0{,}12 \\ x_4 = 0{,}24x_1 + 0{,}16x_2 + 0{,}18x_3 - 0{,}26x_4 + 0{,}36 \end{cases}$
16.	$\begin{cases} x_1 = 0{,}32x_1 - 0{,}05x_2 + 0{,}11x_3 - 0{,}08x_4 + 2{,}15 \\ x_2 = 0{,}11x_1 + 0{,}16x_2 - 0{,}28x_3 - 0{,}06x_4 - 0{,}83 \\ x_3 = 0{,}08x_1 - 0{,}15x_2 + 0{,}12x_4 + 1{,}16 \\ x_4 = -0{,}21x_1 + 0{,}13x_2 - 0{,}27x_3 + 0{,}44 \end{cases}$

2.10. Метод прогонки для систем лінійних рівнянь з тридіагональною матрицею

Якщо матриця системи лінійних рівнянь містить багато нульових елементів, розміщених на наперед визначених позиціях, то безпосередньо застосовувати метод виключення Гаусса для таких систем недоцільно, оскільки порушується спеціальна структура матриці.

Для випадку систем лінійних алгебраїчних рівнянь з тридіагональними матрицями, отриманих, зокрема, в результаті застосування методу скінченних різниць до розв'язання крайових задач для звичайних диференціальних рівнянь, застосовується модифікація методу Гаусса – метод прогонки. Запишемо систему у розгорнутому вигляді

$$
\begin{array}{ll}
c_0 x_0 - b_0 x_1 = f_0, & i = 0 \\
- a_i x_{i-1} + c_i x_i - b_i x_{i+1} = f_i, & i = 1, \ldots, n-1 \\
- a_n x_{n-1} + c_n x_n = f_n, & i = n
\end{array}
$$

Наслідуючи ідею методу Гаусса, проведемо виключення невідомих в системі.

Позначимо $\alpha_1 = \dfrac{b_0}{c_0}$, $\beta_1 = \dfrac{f_0}{c_0}$ і перепишемо систему у вигляді

$$
\begin{array}{ll}
x_0 - \alpha_1 x_1 = \beta_1, & i = 0 \\
- a_i x_{i-1} + c_i x_i - b_i x_{i+1} = f_i, & i = 1, \ldots, n-1 \\
- a_n x_{n-1} + c_n x_n = f_n, & i = n
\end{array}
$$

Візьмемо два перші рівняння системи

$$x_0 - \alpha_1 x_1 = \beta_1, \; - a_1 x_0 + c_1 x_1 - b_1 x_2 = f_1$$

Помножимо перше рівняння на a_1 і додамо до нього друге рівняння. Отримаємо $(c_1 - a_1\alpha_1)x_1 - b_1 x_2 = f_1 + \alpha_1\beta_1$ або після ділення на $c_1 - a_1\alpha_1$

$$x_1 - \alpha_2 x_2 = \beta_2, \; \alpha_2 = \frac{b_1}{c_1 - a_1\alpha_1}, \; \beta_2 = \frac{f_1 + a_1\beta_1}{c_1 - a_1\alpha_1}$$

Усі інші рівняння системи x_0 не містять, тому на цьому перший крок процесу виключення завершується. В результаті отримали систему

$$
\begin{array}{ll}
x_1 - \alpha_2 x_2 = \beta_2, & i = 1 \\
- a_i x_{i-1} + c_i x_i - b_i x_{i+1} = f_i, & i = 2, \ldots, n-1 \\
- a_n x_{n-1} + c_n x_n = f_n, & i = n
\end{array}
$$

яка не містить невідоме x_0 і має аналогічну початковій системі структуру. Якщо ця система буде розв'язана, то невідоме x_0 знайдеться за формулою $x_0 = \alpha_1 x_1 + \beta_1$. До отриманої системи можна знову застосувати метод виключення невідомих. На другому кроці буде виключене невідоме x_1, на третьому – x_2 і т.д. В результаті *k*–го кроку отримаємо систему для невідомих $x_k, x_{k+1,\ldots,} x_n$

$$x_k - \alpha_{k+1}x_{k+1} = \beta_{k+1}, \qquad i = k$$
$$-a_i x_{i-1} + c_i x_i - b_i x_{i+1} = f_i, \; i = k+1,\ldots,n-1$$
$$-a_n x_{n-1} + c_n x_n = f_n, \qquad i = n$$

і формули для знаходження x_i з номерами $i \le k-1$

$$x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}, i = k-1, k-2, \ldots, 0$$

Коефіцієнти α_i і β_i очевидно, знаходяться за формулами

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i},\; \beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i\beta_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \quad i = 1,2,\ldots,\; \alpha_1 = \frac{b_0}{c_0}, \quad \beta_1 = \frac{f_o}{c_0}$$

Покладаючи у формулі для знаходження x_i i=n-1, отримаємо систему для знаходження x_n і x_{n-1}

$$x_{n-1} - \alpha_n x_n = \beta_n,\; -a_n x_{n-1} + c_n x_n = f_n,$$

з якої знаходимо

$$x_n = \beta_{n+1}, x_{n-1} = \alpha_n x_n + \beta_n.$$

Остаточні формули для знаходження невідомих мають вигляд

$$x_n = \beta_{n+1}$$
$$x_i = \alpha_{i+1}x_{i+1} + \beta_{i+1}, i = n-1, n-2, \ldots, 0$$

де α_i і β_i знаходяться за рекурентними формулами

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i} \quad i = 1,2,\ldots,n-1,\; \alpha_1 = \frac{b_0}{c_0},$$
$$\beta_{i+1} = \frac{f_i + a_i\beta_i}{c_i - a_i\alpha_i}, \quad i = 1,2,\ldots,n-1, \; \beta_1 = \frac{f_o}{c_0}$$

Отримані формули описують метод Гаусса, який у застосуванні до системи з тридіагональною матрицею отримав спеціальну назву – метод прогонки. Коефіцієнти α_i і β_i називаються прогоночними коефіцієнтами, формули для їх визначення описують *прямий хід* прогонки, а формули для визначення невідомих – *обернений хід*. Так як значення x_i знаходяться послідовно при переході від i+1 до i, тобто справа наліво, то розглянутий метод називають методом правої прогонки. Аналогічно виводяться формули лівої прогонки.

Зауважимо, що для стійкості методу прогонки досить виконання умови $|\alpha_i|, i = \overline{1,n}$ або для початкової системи умови переваги діагональних елементів.

Розв’яжемо методом прогонки систему, коефіцієнти якої при невідомих мають вигляд:

$$c_0 = 1 + h, b_0 = 1, f_0 = 0;$$
$$a_i = 1 + r_i h, c_i = 2 + 2h^2, b_i = 1 - r_i h; f_i = 4h^2 r_i, i = 1,2,\ldots,9;$$
$$a_{10} = 0, c_{10} = 1, f_{10} = 1 + e.$$

Введемо в комірку H3 електронної таблиці (рис. 2.13) значення величини e (експоненти), в I3 – величину h, в комірки діапазону B6:B16 записуємо числа $r_i = ih$, в комірки C6:F16 – величини a_i, c_i, b_i, f_i, обчислені за відповідними формулами.

Прямий хід. Вводимо в комірки G7 і H7 формули для обчислення α_1 і β_1 відповідно. Значення величин α_i і β_i обчислюються за рекурентними формулами в стовпцях прямого ходу G і H.

I6 fx =G7*I7+H7

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Метод прогонки**								
2								e	h
3								2,7182818	0,1
4	i	r_i	a_i	c_i	b_i	f_i	Прямий хід		Обернений хід
5							α_i	β_i	x_i
6	0	0		1,1	1	0			1,04653707
7	1	0,1	1,01	2,02	0,99	0,004	0,909091	0	1,15119078
8	2	0,2	1,02	2,02	0,98	0,008	0,898515	0,00363	1,27717468
9	3	0,3	1,03	2,02	0,97	0,012	0,888071	0,010605	1,4262023
10	4	0,4	1,04	2,02	0,96	0,016	0,877601	0,02074	1,60148323
11	5	0,5	1,05	2,02	0,95	0,02	0,866977	0,033929	1,80806847
12	6	0,6	1,06	2,02	0,94	0,024	0,856107	0,050128	2,05341149
13	7	0,7	1,07	2,02	0,93	0,028	0,844924	0,069333	2,34823258
14	8	0,8	1,08	2,02	0,92	0,032	0,833385	0,091571	2,70782745
15	9	0,9	1,09	2,02	0,91	0,036	0,821469	0,116878	3,15404375
16	10	1	0	1		3,718	0,809178	0,145293	3,71828183
17								3,718282	

Рис. 2.13. Розв'язання СЛАР методом прогонки

Обернений хід. Обчислюємо в комірці I16 невідоме x_{10}. Після цього приступаємо до послідовного обчислення значень $x_i, (i = 9, \ldots, 1)$ і заповнення стовпця оберненого ходу I.

На рис. 2.14 відображені усі формули, використані в таблиці.

Робота №15. Методом прогонки розв'язати систему лінійних рівнянь

$$\begin{aligned} c_0 x_0 - b_0 x_1 &= f_0, & i &= 0 \\ -a_i x_{i-1} + c_i x_i - b_i x_{i+1} &= f_i, & i &= 1, \ldots, n-1 \\ -a_n x_{n-1} + c_n x_n &= f_n, & i &= n \end{aligned}$$

при n=6, h=0,05, r_i=x_0+ih (i=0,...,n). Варіанти вибору x_0, а також коефіцієнтів a_i, b_i, c_i, f_i подані у наступній таблиці (стор. 46).

F3 fx

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Метод прогонки**								
2								e	h
3								=EXP(1)	0,1
4	i	r_i	a_i	c_i	b_i	f_i	Прямий хід		Обернений хід
5							α_i	β_i	x_i
6	0	=A6*$I$3		=1+$I$3	1	0			=G7*I7+H7
7	1	=A7*$I$3	=1+B7*$I$3	=2+2*$I$3*$I$3	=1-B7*$I$3	=4*B7*$I$3*$I$3	=E6/D6	=F6/D6	=G8*I8+H8
8	2	=A8*$I$3	=1+B8*$I$3	=2+2*$I$3*$I$3	=1-B8*$I$3	=4*B8*$I$3*$I$3	=E7/(D7-G7*C7)	=(F7+C7*H7)/(D7-G7*C7)	=G9*I9+H9
9	3	=A9*$I$3	=1+B9*$I$3	=2+2*$I$3*$I$3	=1-B9*$I$3	=4*B9*$I$3*$I$3	=E8/(D8-G8*C8)	=(F8+C8*H8)/(D8-G8*C8)	=G10*I10+H10
10	4	=A10*$I$3	=1+B10*$I$3	=2+2*$I$3*$I$3	=1-B10*$I$3	=4*B10*$I$3*$I$3	=E9/(D9-G9*C9)	=(F9+C9*H9)/(D9-G9*C9)	=G11*I11+H11
11	5	=A11*$I$3	=1+B11*$I$3	=2+2*$I$3*$I$3	=1-B11*$I$3	=4*B11*$I$3*$I$3	=E10/(D10-G10*C10)	=(F10+C10*H10)/(D10-G10*C10)	=G12*I12+H12
12	6	=A12*$I$3	=1+B12*$I$3	=2+2*$I$3*$I$3	=1-B12*$I$3	=4*B12*$I$3*$I$3	=E11/(D11-G11*C11)	=(F11+C11*H11)/(D11-G11*C11)	=G13*I13+H13
13	7	=A13*$I$3	=1+B13*$I$3	=2+2*$I$3*$I$3	=1-B13*$I$3	=4*B13*$I$3*$I$3	=E12/(D12-G12*C12)	=(F12+C12*H12)/(D12-G12*C12)	=G14*I14+H14
14	8	=A14*$I$3	=1+B14*$I$3	=2+2*$I$3*$I$3	=1-B14*$I$3	=4*B14*$I$3*$I$3	=E13/(D13-G13*C13)	=(F13+C13*H13)/(D13-G13*C13)	=G15*I15+H15
15	9	=A15*$I$3	=1+B15*$I$3	=2+2*$I$3*$I$3	=1-B15*$I$3	=4*B15*$I$3*$I$3	=E14/(D14-G14*C14)	=(F14+C14*H14)/(D14-G14*C14)	=G16*I16+H16
16	10	=A16*$I$3	0	1		=3,718	=E15/(D15-G15*C15)	=(F15+C15*H15)/(D15-G15*C15)	=H17
17								=1+H3	

Рис. 2.14. Формули для обчислень методом прогонки

Таблиця. Початкові дані для роботи №15.

№	x_0	b_0	c_0	f_0	a_6	c_6	f_6	a_i	c_i	b_i	f_i
1	0,9	1	$2h+1$	$4h$	0	1	1	$1+\frac{r_i h}{2}$	$2-2h^2$	$1-\frac{r_i h}{2}$	$-h^2(r_i+1)$
2	0,5	$h+2$	2	1	1	1	$1,2h$	$1-\frac{r_i h}{2}$	$2-2h^2$	$1+\frac{r_i h}{2}$	$-h^2(r_i+1)$
3	0,6	1	1	$-0,7h$	1	$1-2h$	$-2h$	$1-h$	$2+r_i h^2$	$1+h$	$-h^2 r_i^2$
4	1,2	1	1	$-h$	2	$2-4h$	$-h$	$r_i-1,5r_i h$	h^2-2r_i	$r_i+1,5r_i h$	$-(r_i^2+r_i)h^2$
5	1,3	1	$2h-1$	h	0	1	1	$1-0,75h$	$2+h^2 r_i$	$1+0,75h$	$-0,5h^2$
6	0,3	1	$1-2h$	$-h$	1	1	$2h$	$1-r_i h$	$2+h^2$	$1+r_i h$	$-0,4h^2$
7	0,4	0	1	1	2	$h+2$	$1,4h$	$1+0,25r_i h$	$2-h^2$	$1-0,25r_i h$	$-2h^2$
8	1,2	1	$2h+1$	$2h$	1	1	$2h$	$1+\frac{r_i h}{2}$	$2-2h^2 r_i$	$1-\frac{r_i h}{2}$	$0,8h^2$
9	0,5	1	$1-\frac{r_i h}{2}$	h	0	1	3	$1-r_i^2 h$	$2-h^2$	$1+r_i^2 h$	$-h^2 r_i$
10	1,1	0,5	$0,5-1,4h$	$-2h$	1	1	$2,5h$	$1-r_i h$	2	$1+r_i h$	$-h^2(r_i+1,5)$
11	1,5	0	1	0,6	-0,8	$0,8-2h$	$-3h$	$1-0,3r_i h$	$2+2h^2$	$1+0,3r_i h$	$-h^2$
12	1	1	1	$-0,5h$	1	$1-2h$	$-2h$	$1+0,25h$	$2-0,5h^2 r_i$	$1-0,25h$	$-2h^2 r_i$
13	1,8	0	1	0,5	1	$2h+1$	1,7	$1-0,4h$	$2+h^2 r_i$	$1+0,4h$	$-1,4h^2$
14	0,9	1	$1-0,5h$	$-h$	0	1	0,8	$1-2h$	$2+\frac{h^2}{r_i}$	$1+2h$	$-\frac{h^2}{r_i}$
15	0,8	0	1	1,6	1	$1-6h$	$-2h$	$6+h$	$12-6h^2 r_i$	$6-h$	$-12h^2$
16	0,6	0,3	$0,3+h$	$0,6h$	1	1	$1,7h$	$1-\frac{h}{2r_i}$	$2+0,4h^2$	$1+\frac{h}{2r_i}$	$-2h^2 r_i$

Розділ 3

Ітераційні методи розв’язання часткової проблеми власних значень матриць

Розглянемо методи, які використовуються для знаходження одного або декількох найбільших за модулем власних значень.

3.1. Знаходження першого (найбільшого за модулем) власного значення матриці і відповідного власного вектору

Припустимо, що власні значення матриці A перенумеровані в порядку незростання модулів, тобто, $|\lambda_1| > |\lambda_2| \ge |\lambda_3| \ge \ldots \ge |\lambda_n|$. Візьмемо довільний ненульовий вектор $Y^{(0)}$ і побудуємо рекурентну послідовність векторів

$$Y^{(0)},\ Y^{(1)} = AY^{(0)},\ Y^{(2)} = AY^{(1)} = A^2Y^{(0)},\ \ldots,\ Y^{(k)} = AY^{(k-1)} = A^kY^{(0)},\ \ldots$$

При великих k має місце співвідношення $\lambda_1 \approx \dfrac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}}$, де $y_i^{(k)}, y_i^{(k+1)}$ – однойменні координати двох послідових векторів, зокрема, можна взяти середнє арифметичне відповідних відношень. Вектор $Y^{(k)} = A^kY^{(0)}$ лише числовим множником відрізняється від першого власного вектора $X^{(1)}$, отже його можна взяти за власний вектор, що відповідає власному значенню λ_1.

Знайдемо степеневим ітераційним методом найбільше за модулем власне значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}6 & 2{,}3 & 1{,}2 \\ 2{,}3 & 0{,}6 & 1{,}5 \\ 1{,}2 & 1{,}5 & 3{,}8 \end{pmatrix}$$

і відповідний йому власний вектор.

Введемо в електронну таблицю в комірки діапазону B2:D4 елементи матриці A (рис. 3.1). В комірки B6, C6, D6 записуємо компоненти початкового вектора $Y^{(0)}$. Далі в стовпцях B, C, D, починаючи з сьомого рядка, обчислюємо компоненти послідовних векторів $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$, ... , . В стовпцях E, F, G, починаючи з шостого рядка, обчислюємо відношення $\dfrac{y_i^{(k+1)}}{y_i^{(k)}}$. З таблиці видно, що зупинитися можна вже на ітераціях $Y^{(10)} = A^{10}Y^{(0)}$ і $Y^{(11)} = A^{11}Y^{(0)}$, звідки отримаємо значення λ_1=5,524343.

За перший власний вектор матриці A можна взяти $X^{(1)}=Y^{(k)}$. Отже $X^{(1)} \approx Y^{(11)} =$(122047628,1; 112753751; 183018876). Щоб перша норма вектора дорівнювала 1, поділимо компоненти вектора $X^{(1)}$ на найбільшу з них за абсолютною величиною. Тоді остаточно одержимо в комірках B24, C24, D24 вектор $X^{(1)}$=(0,666858145; 0,61607717; 1).

G19	f_x =D20/D19								
	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Метод ітерацій обчислення власних значень λ_1, λ_2**								
2	A	1,6	2,3	1,2	$\frac{y_1^{(k+1)}}{y_1^{(k)}}$	$\frac{y_2^{(k+1)}}{y_2^{(k)}}$	$\frac{y_3^{(k+1)}}{y_3^{(k)}}$	λ_1	
3		2,3	0,6	1,5					
4		1,2	1,5	3,8					
5									
6	Y_0	1	1	1	5,1	4,4	6,5		
7	Y_1	5,1	4,4	6,5	5,1137255	5,48181818	5,756923		
8	Y_2	26,08	24,12	37,42	5,4489264	5,41401327	5,603207		
9	Y_3	142,108	130,586	209,672	5,4840473	5,51137182	5,547532		
10	Y_4	779,327	719,708	1163,1622	5,5150742	5,5147646	5,532135		
11	Y_5	4298,04624	3969,0202	6434,77076	5,5204956	5,52254045	5,526742		
12	Y_6	23727,34536	21919,0746	35563,3147	5,523315	5,52346818	5,525132		
13	Y_7	131053,6018	121069,311	196492,022	5,5239657	5,5241324	5,524591		
14	Y_8	723935,6049	668802,904	1085537,97	5,5242334	5,5242592	5,524423		
15	Y_9	3999189,214	3694640,59	5996971,38	5,5243052	5,52431992	5,524368		
16	Y_{10}	22092741,76	20410376,6	33129479,2	5,5243314	5,52433465	5,524351		
17	Y_{11}	122047628,1	112753751	183018876	5,5243391	5,52434047	5,524346		
18	Y_{12}	674232482,9	622890109	1011059508	5,5243417	5,52434208	5,524344		
19	Y_{13}	3724690633	3441058039	5585440275	5,5243425	5,52434265	5,524343		
20	Y_{14}	20576466832	1,901E+10	3,0856E+10					
21									
22	X_1	122047628,1	112753751	183018876					
23	max	183018875,9	min	112753751	MaxMod	183018876			
24	X_1 норм.	0,666858145	0,61607717	1				5,524343	
25									
26	Y_{10}	Y_9	Y_8	λ_1	$\lambda_1 Y_9$	$Y_{10}-\lambda_1 Y_9$	$\lambda_1 Y_8$	$Y_9-\lambda_1 Y_8$	λ_2
27	22092742	3999189,214	723935,605	5,52434278	22092892	-150,308489	3999268	-79,2193	1,897373
28	20410377	3694640,593	668802,904	5,52434278	20410461	-84,4744868	3694696	-55,9019	1,511119
29	33129479	5996971,379	1085537,97	5,52434278	33129326	153,637074	5996884	87,51397	1,755572
30									
31									1,721355
32	X_2	-150,308489	-84,474487	153,637074					
33	max	153,6370739	min	-150,30849	MaxMod	153,637074			
34	X_1 норм.	-0,97833475	-0,5498314	1					

Рис. 3.1, Степеневий метод обчислення перших власних значень

Робота №16. Використовуючи степеневий метод, визначити перше власне число матриці A (найбільше за модулем). Потім знайти відповідний йому власний вектор, що має першу норму, рівну 1.

№	A	№	A	№	A	№	A
1.	$\begin{pmatrix} 2{,}1 & 1 & 1{,}1 \\ 1 & 2{,}6 & 1{,}1 \\ 1{,}1 & 1{,}1 & 3{,}1 \end{pmatrix}$	2.	$\begin{pmatrix} 2{,}4 & 1 & 1{,}4 \\ 1 & 2{,}9 & 1{,}4 \\ 1{,}4 & 1{,}4 & 3{,}4 \end{pmatrix}$	3.	$\begin{pmatrix} 1{,}3 & 0{,}4 & 0{,}5 \\ 0{,}4 & 1{,}3 & 0{,}3 \\ 0{,}5 & 0{,}3 & 1{,}3 \end{pmatrix}$	4.	$\begin{pmatrix} 1{,}6 & 0{,}7 & 0{,}8 \\ 0{,}7 & 1{,}6 & 0{,}3 \\ 0{,}8 & 0{,}3 & 1{,}6 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} 2{,}2 & 1 & 1{,}2 \\ 1 & 2{,}7 & 1{,}2 \\ 1{,}2 & 1{,}2 & 3{,}2 \end{pmatrix}$	6.	$\begin{pmatrix} 2{,}5 & 1 & 1{,}5 \\ 1 & 3 & 1{,}5 \\ 1{,}5 & 1{,}5 & 3{,}5 \end{pmatrix}$	7.	$\begin{pmatrix} 1{,}4 & 0{,}5 & 0{,}6 \\ 0{,}5 & 1{,}4 & 0{,}3 \\ 0{,}6 & 0{,}3 & 1{,}4 \end{pmatrix}$	8.	$\begin{pmatrix} 1{,}7 & 0{,}8 & 0{,}9 \\ 0{,}8 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 0{,}9 & 0{,}3 & 1{,}7 \end{pmatrix}$
9.	$\begin{pmatrix} 2{,}3 & 1 & 1{,}3 \\ 1 & 2{,}8 & 1{,}3 \\ 1{,}3 & 1{,}3 & 3{,}3 \end{pmatrix}$	10.	$\begin{pmatrix} 2{,}6 & 1 & 1{,}6 \\ 1 & 3{,}1 & 1{,}6 \\ 1{,}6 & 1{,}6 & 3{,}6 \end{pmatrix}$	11.	$\begin{pmatrix} 3{,}5 & 1 & 2{,}5 \\ 1 & 4 & 2{,}5 \\ 2{,}5 & 2{,}5 & 4{,}5 \end{pmatrix}$	12.	$\begin{pmatrix} 1{,}8 & 0{,}9 & 1 \\ 0{,}9 & 1{,}8 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}3 & 1{,}8 \end{pmatrix}$
13.	$\begin{pmatrix} 1{,}5 & 0{,}6 & 0{,}7 \\ 0{,}6 & 1{,}5 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}3 & 1{,}5 \end{pmatrix}$	14.	$\begin{pmatrix} 2{,}7 & 1 & 1{,}7 \\ 1 & 3{,}2 & 1{,}7 \\ 1{,}7 & 1{,}7 & 3{,}7 \end{pmatrix}$	15.	$\begin{pmatrix} 3{,}2 & 1 & 3{,}2 \\ 1 & 3{,}7 & 2{,}2 \\ 2{,}2 & 2{,}2 & 4{,}2 \end{pmatrix}$	16.	$\begin{pmatrix} 2{,}8 & 1 & 1{,}8 \\ 1 & 3{,}3 & 1{,}8 \\ 1{,}8 & 1{,}8 & 3{,}8 \end{pmatrix}$

3.2. Знаходження другого власного значення матриці і відповідного власного вектору

Припустимо, що власні значення матриці *A* такі, що

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| > |\lambda_3| \geq \ldots \geq |\lambda_n|,$$

тобто існують два відмінних одне від одного, найбільших за модулем власних значення λ_1 і λ_2 матриці *A*. У такому випадку методом ітерацій можна наближено знайти друге власне значення λ_2 і відповідний йому власний вектор $X^{(2)}$.

Друге власне значення визначається із співвідношення

$$\lambda_2 \approx \frac{y_i^{(m+1)} - \lambda_1 y_i^{(m)}}{y_i^{(m)} - \lambda_1 y_i^{(m-1)}},$$

де $y_i^{(m-1)}, y_i^{(m)}, y_i^{(m+1)}$ – однойменні координати трьох послідових векторів, λ_1 – перше власне число. Щоб уникнути втрати точності при відніманні близьких чисел, на практиці номер ітерації *m* для визначення λ_2 беруть меншим, ніж номер ітерації *k* для визначення λ_1.

Що стосується власного вектора $X^{(2)}$, то його визначають із рівності

$$X^{(2)} \approx Y^{(m+1)} - \lambda_1 Y^{(m)}$$

Знайдемо степеневим ітераційним методом друге власне значення матриці *A*

$$A = \begin{pmatrix} 1{,}6 & 2{,}3 & 1{,}2 \\ 2{,}3 & 0{,}6 & 1{,}5 \\ 1{,}2 & 1{,}5 & 3{,}8 \end{pmatrix}$$

Скористаємося обчисленнями, проведеними вище (п. 3.2): λ_1=5,524343. Для обчислення λ_2 виберемо вектори $Y^{(8)}$, $Y^{(9)}, Y^{(10)}$, компоненти яких розташовані в діапазонах комірок C27:C29; B27:B29; A27:A29; відповідно (рис.3.1). Всі розрахунки заносимо в таблицю.

Наближено обчислюємо λ_2=1,721355 і розташовуємо результат в комірці I31. За другий власний вектор матриці A можна взяти $X^{(2)} \approx Y^{(10)} - \lambda_1 Y^{(9)} =$(-150,308489;-84,474487;153,637074). Поділимо компоненти вектора $X^{(2)}$ на найбільшу з них за абсолютною величиною. Тоді остаточно одержимо в комірках B34, C34, D34 нормований вектор $X^{(2)}=$ =(-0,97833475; -0,5498314; 1).

Робота №17. Використовуючи степеневий метод, визначити друге власне число матриці A. Потім знайти відповідний йому власний вектор, що має першу норму, рівну 1. Для вибору матриці скористатися варіантами роботи 16.

3.3. Метод скалярних добутків знаходження першого власного значення матриці

Для знаходження першого власного значення λ_1 дійсної матриці A можна застосувати інший ітераційний процес, в якому будуються дві послідовності векторів

$$Y^{(0)},\ Y^{(1)} = AY^{(0)},\ Y^{(2)} = AY^{(1)},\ \ldots,\ Y^{(k)} = AY^{(k-1)},\ \ldots$$

і

$$Y^{(0)},\ \left(Y^{(1)}\right)' = A^T Y^{(0)},\ \left(Y^{(2)}\right)' = A^T \left(Y^{(1)}\right)',\ \ldots,\ \left(Y^{(k)}\right)' = A^T \left(Y^{(k-1)}\right)',\ \ldots$$

де A і A^T – відповідно дана і транспонована матриці. Тоді $\lambda_1 \approx \dfrac{\left(\left(Y^{(k)}\right)', Y^{(k)}\right)}{\left(\left(Y^{(k-1)}\right)', Y^{(k)}\right)}$.

Якщо матриця A – симетрична, то $A = A^T$ і $\lambda_1 \approx \dfrac{\left(Y^{(k)}, Y^{(k)}\right)}{\left(Y^{(k-1)}, Y^{(k)}\right)}$. Отже в цьому випадку будувати треба лише одну послідовність $Y^{(k)}$.

Знайдемо методом скалярних добутків перше власне значення матриці

$$A = \begin{pmatrix} 2,4 & 0,8 & 3,3 \\ 0,8 & 1,4 & 1,7 \\ 3,3 & 1,7 & 0,6 \end{pmatrix}$$

Введемо в електронну таблицю в комірки діапазону B2:D4 елементи матриці A (рис. 3.2). В комірки B8, C8, D8 записуємо компоненти початкового вектора $Y^{(0)}$. Далі в стовпцях B, C, D, починаючи з дев'ятого рядка, обчислюємо компоненти послідовних векторів $Y^{(1)}$, $Y^{(2)}$, ... , . В стовпцях E, F, починаючи з дев'ятого рядка, обчислюємо скалярні добутки $\left(Y^{(k)}, Y^{(k)}\right)$ і $\left(Y^{(k-1)}, Y^{(k)}\right)$. З таблиці видно, що зупинитися можна вже на ітераціях $Y^{(3)} = A^3 Y^{(0)}$ і $Y^{(4)} = A^4 Y^{(0)}$, звідки отримаємо значення λ_1=5,598943.

G12	fx =E12/F12						
	A	B	C	D	E	F	G
1	**Метод скалярних добутків обчислення першого власного значення**						
2	A	2,4	0,8	3,3			
3		0,8	1,4	1,7			
4		3,3	1,7	0,6			
5							
6–7		$y_1^{(k)}$	$y_2^{(k)}$	$y_3^{(k)}$	(Y_k, Y_k)	(Y_{k-1}, Y_k)	λ_1
8	Y_0	1	1	1			
9	$Y_1=AY_0$	6,5	3,9	5,6	88,82	16	5,55125
10	$Y_2=AY_1$	37,2	20,18	31,44	2779,55	496,566	5,59753588
11	$Y_3=AY_2$	209,176	111,46	175,93	87129,3	15561,8	5,59890373
12	$Y_4=AY_3$	1171,76	622,466	985,321	2731341	487831	5,5989435

Рис. 3.2. Метод скалярних добутків обчислення першого власного значення

Робота №18. Використовуючи метод скалярних добутків, визначити перше власне число матриці A.

№	A	№	A	№	A	№	A
1.	$\begin{pmatrix} 1,7 & 2,8 & 0,3 \\ 2,8 & 1,2 & 0,6 \\ 0,3 & 0,6 & 1,5 \end{pmatrix}$	2.	$\begin{pmatrix} 1,7 & 0,4 & 2,8 \\ 0,4 & 3,2 & 1,2 \\ 2,8 & 1,2 & 0,5 \end{pmatrix}$	3.	$\begin{pmatrix} 2,3 & 1,4 & 0,6 \\ 1,4 & 1,7 & 0,5 \\ 0,6 & 0,5 & 1,3 \end{pmatrix}$	4.	$\begin{pmatrix} 2,3 & 3,5 & 1,4 \\ 3,5 & 0,4 & 0,6 \\ 1,4 & 0,6 & 1,3 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} 0,6 & 1,3 & 1,7 \\ 1,3 & 2,5 & 0,8 \\ 1,7 & 0,8 & 1,4 \end{pmatrix}$	6.	$\begin{pmatrix} 3,7 & 0,3 & 1,2 \\ 0,3 & 2,4 & 0,8 \\ 1,2 & 0,8 & 1,5 \end{pmatrix}$	7.	$\begin{pmatrix} 3,2 & 0,5 & 1,2 \\ 0,5 & 1,4 & 2,3 \\ 1,2 & 2,3 & 0,6 \end{pmatrix}$	8.	$\begin{pmatrix} 4,1 & 0,4 & 1,3 \\ 0,4 & 2,2 & 1,7 \\ 1,3 & 1,7 & 0,5 \end{pmatrix}$
9.	$\begin{pmatrix} 2,4 & 2,5 & 0,7 \\ 2,5 & 1,2 & 0,3 \\ 0,7 & 0,3 & 3,5 \end{pmatrix}$	10.	$\begin{pmatrix} 1,5 & 0,8 & 2,9 \\ 0,8 & 3,4 & 2,2 \\ 2,9 & 2,2 & 0,4 \end{pmatrix}$	11.	$\begin{pmatrix} 1,8 & 2,4 & 0,5 \\ 2,4 & 1,3 & 0,7 \\ 9,5 & 0,7 & 1,6 \end{pmatrix}$	12.	$\begin{pmatrix} 0,8 & 1,3 & 3,2 \\ 1,3 & 4,2 & 0,5 \\ 3,2 & 0,5 & 0,7 \end{pmatrix}$
13.	$\begin{pmatrix} 2,4 & 3,5 & 0,7 \\ 3,5 & 1,2 & 0,4 \\ 0,7 & 0,4 & 1,3 \end{pmatrix}$	14.	$\begin{pmatrix} 2,3 & 1,7 & 0,8 \\ 1,7 & 0,5 & 1,2 \\ 0,8 & 1,2 & 1,9 \end{pmatrix}$	15.	$\begin{pmatrix} 2,4 & 1,3 & 0,5 \\ 1,3 & 0,8 & 2,4 \\ 0,5 & 2,4 & 3,3 \end{pmatrix}$	16.	$\begin{pmatrix} 1,5 & 2,3 & 0,4 \\ 2,3 & 1,4 & 2,5 \\ 0,4 & 2,5 & 0,8 \end{pmatrix}$

СПИСОК ЛІТЕРАТУРИ

1. Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М. Численные методы. – М.: Наука, 1987.
2. Березин И.С., Жидков Н.П. Методы вычислений. – М.: Наука, 1966. – Т.1.
3. Воеводин В.С., Фаддеев Д.К., Фаддеева В.Н. Вычислительные методы линейной алгебры. – М.–Л.: Физматгиз, 1963.
4. Воеводин В.С., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления. – М.: Наука, 1984.
5. Волков Е.А. Численные методы. – М.: Наука, 1982.
6. Воробьева Г.Н., Данилова А.Н. Практикум по численным методам. – М.: Высш. шк., 1979.
7. Данилович В.П. Чисельні методи в задачах та вправах: Навчальний посібник. – К.: УМК ВО, 1989.
8. Демидович Б.П., Марон И.А. Основы вычислительной математики. – М. : Наука, 1970.
9. Икрамов Х.Д. Численное решение матричных уравнений. – М.: Наука, 1984.
10. Калиткин Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978.
11. Копченова Н.В., Марон И.А. Вычислительная математика в примерах и задачах. – М. : Наука, 1972.
12. Крылов В.И., Бобков В.В., Монастырный П.И. Вычислительные методы высшей математики. – М. Наука, 1972. – Т.1.
13. Курош А.Г. Курс высшей алгебры. – М.: Наука, 1965.
14. Ланцош К. Практические методы прикладного анализа. – М.: ГИФМЛ, 1961.
15. Ларсен Р.У. Инженерные расчеты в Excel. – М.: Вильямс, 2002.
16. Математический практикум /Под. ред. Г.Н. Положего. – М.: Физматгиз, 1960.
17. Методичні вказівки та учбові завдання для самостійних робіт над курсом “Методи обчислень” для студентів механіко-математичного факультету /Упорядн. А.А.Глущенко та ін. – К., 1992.
18. Молчанов И.Н. Машинные методы решения прикладных задач. Алгебра, приближение функций. – К.: Наукова думка, 1987.
19. Самарский А.А. Введение в численные методы. – М. Наука, 1987.
20. Сборник задач по вычислительным методам /Под. ред. П.И.Монастырного. – Мн.: БГУ, 1983.
21. Турчак Л.И. Основы численных методов. – М.: Наука, 1987.
22. Форсайт Дж., Молер К. Численное решение систем линейных алгебраических уравнений. – М.: Мир, 1969.
23. Черкасова М.П. Сборник задач по численным методам. Мн.: Высш. шк., 1967.

ЗМІСТ